CUBICACION DE ARBOLES

CUBICACION DE ARBOLES

Entendemos por cubicación, la determinación del volumen cúbico sólido de árboles individuales y del vuelo de masas boscosas. En el presente trabajo trataremos con el primer aspecto, la cubicación de árboles individuales.

1. INTRODUCCION

En árboles cuyo crecimiento no ha sido afectado por influencias exteriores excepcionales, el tronco tiende a adquirir una forma longitudinal más o menos rectilínea con una sección transversal más o menos circular. Este es el comportamiento usual de las principales especies comercialmente aprovechadas.

Por otro lado, nos encontramos con que los sucesivos diámetros que van desde su base hasta su límite superior se reducen de tamaño; es decir, el tronco es cada vez "más fino". Según cómo ocurra esta reducción adoptará el tronco una forma longitudinal, de la cual dependerá tanto su distribución espacial como la magnitud del volumen mismo. La distribución del diámetro a lo largo del eje del tronco se conoce como perfil del tronco y la curva que lo representa se conoce con el nombre de curva de ahusamiento.

A resultas de este tipo de desarrollo, la forma del tronco no sigue ninguna ley geométrica definida, mostrando diferencias entre individuos de distintas especies y entre individuos de una misma especie, según las características de su crecimiento. Es prácticamente imposible definir con total exactitud la curva del perfil de un tronco mediante un modelo matemático.

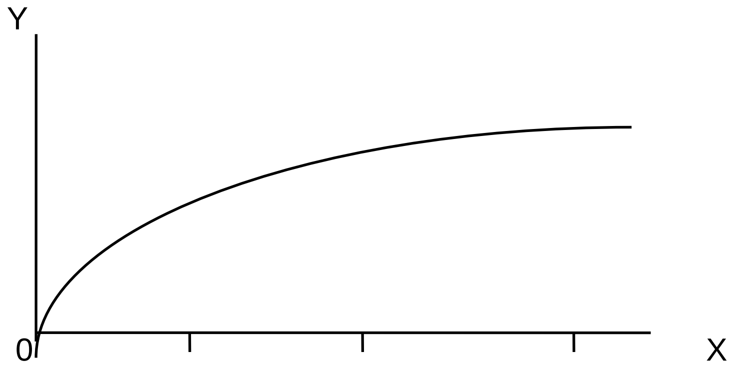
Una solución para la representación de la forma de los troncos son los Sólidos de Revolución. Un sólido de revolución es un cuerpo tridimensional engendrado por la rotación, alrededor de un eje central, de una curva que representa el radio de la sección del sólido. A esta curva la denominamos curva directriz. Si conocemos la ecuación que define a la curva directriz, resulta sencillo la cubicación del tronco por vía algebraica, a través de algún método de integración.

De esta forma, es posible asimilar el tronco del árbol a sólidos de revolución perfectamente definidos, cuyo volumen es de fácil cálculo mediante fórmulas sencillas. Estos sólidos geométricos, que tomamos como modelo y a los cuales asimilamos la forma del tronco, fuste o rollo, se conocen con el nombre de PROTOTIPOS DENDROMETRICOS o, simplemente, TIPOS DENDROMETRICOS.

A los fines de establecer fórmulas que permitan determinar el volumen de troncos, fustes y rollos, se han definido cuatro modelos dendrométricos. La forma real del tronco del árbol, rara vez será idéntica a la de alguno de estos modelos. Pero es precisamente el modelo, el único punto de referencia teórica que nos permite analizar el comportamiento de las fórmulas volumétricas que se puedan proponer. Por otra parte, la experiencia ha demostrado que si nos referimos a porciones del tronco lo suficientemente cortas, cada una de estas piezas puede asimilarse a alguna forma modelo con casi total exactitud.

2. TIPOS DENDROMETRICOS COMO SOLIDOS DE REVOLUCION

De la geometría analítica, conocemos la ecuación $Y = b\ X^{0.5}$, que representa una curva conocida como parábola de Apolonio:



Parábola de Apolonio-

que es un caso particular de un modelo de curvas más general:

$$Y = b\sqrt{X^r} \qquad (1)$$

donde: X es la abscisa, Y es la ordenada, b es una constante y r es el factor que define la forma de la curva (define la tasa de crecimiento de la función).

El componente r puede tomar cualquier valor. Sin embargo, sólo se consideran cuatro modelos, que quedan definidos con cuatro valores de r: 0, 1, 2 y 3. A continuación, describimos la curva y el sólido de revolución que se engendra con cada uno de estos cuatro valores de r.

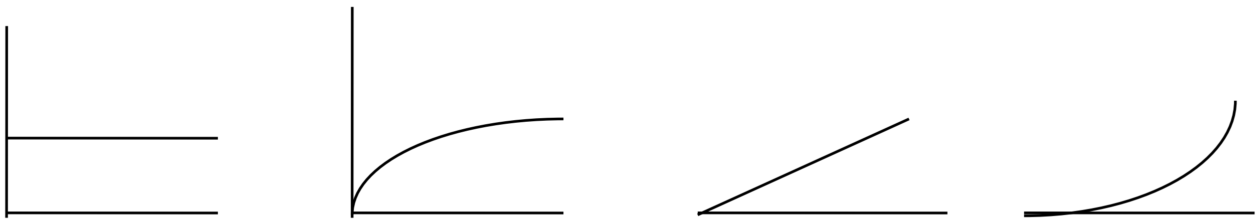
- Con $r = 0$ se obtiene $Y = b\,X^0 = b$; lo que representa una línea recta paralela al eje de las X, cuya rotación alrededor del eje X da lugar a un <u>CILINDRO</u>.

- Con $r = 1$ se obtiene $Y = b\,X^{1/2}$; lo que representa la parábola de Apolonio, ya mencionada, cuya rotación alrededor del eje X da lugar al PARABOLOIDE DE APOLONIO o simplemente PARABOLOIDE.

- Con $r = 2$ se obtiene $Y = b\,X^{2/2} = b\,X$; lo que representa una recta que pasa por el punto de origen de coordenadas cuya rotación alrdedor dl eje X da lugar a la aparición del CONO.

- Con $r = 3$ se obtiene $Y = b\,X^{3/2}$; lo que representa la llamada parábola de Neil, cuya rotación alrededor del eje X da lugar a la apariión del PARABOLOIDE DE NEIL o simplemente NEILOIDE.

En la Figura 1 se indican las curvas y sólidos engendrados.



r = 0 r =1 r = 2
r = 3

Figura 1

No debe perderse de vista que el punto cero de coordenadas se halla en el vértice del cuerpo (con excepción del cilindro que no tiene vértice).

3. FORMULAS DE CUBICACION DE SOLIDOS DE REVOLUCION

Asumiendo que el tronco tiene la sección transversal circular, el radio de una sección a una distancia X (= RX = R) queda determinado por:

$$\text{Radio} = R = b\sqrt{X^r} \qquad (2)$$

Por lo tanto, $R^2 = b^2 X^r$ (3)

y el área de la sección es, $\pi R^2 = \pi b^2 X^r$ (4)

Si indicamos con Ax el área de la sección a una distancia X y con B el producto entre π y el cuadrado de b, la fórmula resultante es:

$$Ax = \pi b^2 X^r = B X^r \qquad (5)$$

Si la forma de la sección fuese elíptica, donde Y y Z representan los ejes mayor y menor de la elipse, el área de una sección sería igual a:

$$Ax = \pi Y Z \qquad (6)$$

y si tomamos en cuenta que, $Y = b_1 \sqrt{X^r}$ y que $Z = b_2 \sqrt{X^r}$ (7)

el área de una sección resulta igual a,: $Ax = \pi b_1 b_2 X^r = B`X^r$
(8)

lo que indica que las fórmulas deducidas para una sección circular son también válidas para secciones elípticas. No obstante, trataremos sólo con secciones circulares.

Definiendo con Ab el área de la sección situada en la base del sólido y con H su longitud total (altura), procederemos a la determinación de su volumen mediante cálculo integral:

$$V = \int_0^H \pi . R^2 . dx = \int_0^H \pi . b_2 . X^r . dx \qquad (9)$$

$$V = \pi . b^2 \int_0^H X^r . dx = \pi . b^2 \left[\frac{H^{r+1}}{r+1} \right] \qquad (10)$$

Pero, $Ab = \pi \ b^2 \ H^r$ (11)

por lo tanto, $V = \dfrac{Ab.H}{(r+1)} = \dfrac{1}{(r+1)} \times Ab.H$ (12)

El producto Ab.H representa el volumen de un cilindro con igual área Ab y longitud total H que el sólido en cuestión. Por lo tanto, el volumen correspondiente a cada modelo restante, lo podemos considerar como una función del volumen del cilindro asociado. El componente que define finalmente el volumen, está representada por el cociente 1/(r+1), al que denominamos COEFICIENTE DE FORMA o COEFICIENTE MORFICO y lo representamos con la letra F. De esta forma, la ecuación 12 se convierte en,

$$V = Ab \times H \times F \qquad (13)$$

Esta última ecuación indica que el volumen de un sólido completo puede expresarse por el producto de tres componentes, que son: a) el área de su base; b) su altura total; y c) su coeficiente de forma. Recurriendo a (13) y reemplazando F por su correspondiente valor, el volumen de cada modelo completo queda expresada por las fórmulas indicadas en el Cuadro 1, donde Ab es el área de la base del sólido y H su altura total.

Cuadro 1.- Volumen total para cada modelo.

MODELO	VOLUMEN TOTAL
Cilindro	Ab.H
Paraboliode	1/2.Ab.H
Cono	1/3.Ab.H
Neiloide	1/4.Ab.H

Un dato interesante, es conocer cómo se distribuye el volumen de cada modelo, si lo separamos en secciones de igual longitud. El Cuadro 2 muestra el volumen de cada sección y el acumulado para cada uno de los cuatro modelos que estamos tratando, si el sólido es separado en cuatro secciones de igual longitud.

Cuadro 3. Distribución del volumen para los modelos paraboloide, cono y neiloide, en por ciento del volumen total.

	PARABOLOIDE		CONO		NEILOIDE	
SECTOR	Parcial	Acumul.	Parcial	Acumul.	Parcial	Acumul.
1 = (1/4).Ho	43,7500	43,7500	57,0125	57,0125	68,3594	68,3594
2 = (2/4).Ho	31,2500	75,0000	29,6875	87,5000	25,3906	93,7500
3 = (3/4).Ho	16,7500	93,7500	10,9375	98,4375	5,8594	99,6094
4 = (4/4).Ho	5,2500	100	1,5625	100	0,3906	100

Las fórmulas vistas hasta ahora se refieren a un sólido completo. Ahora veremos la fórmula general para la determinación del volumen en sólidos incompletos, también llamados troncos de sólido. Para ello nos guiaremos por la Figura 3.

Figura 3.-

El volumen puede obtenerse por diferencia entre el volumen acumulado hasta una distancia X_2 y el acumulado hasta una distancia menor X_1.:

$$V = V_{X2} - V_{X1} = F.A_2.X_2 - F.A_1.X_1 = F(A_2.X_2 - A_1.X_1) \qquad (14)$$

pero, $A = B.X^r$ (15)

por lo tanto, $V = F.B.(X_2^{\,r+1} - X_1^{\,r+1})$ (16)

El cilindro de base A_2 y longitud $L = (X_2 - X_1)$ tiene volumen:

$$Vc = A_2.L = B.X_2^{\,r}.(X_2 - X_1) \qquad (17)$$

Dividiendo V por Vc, tenemos,

$$\frac{V}{Vc}=\frac{F.B.(X_2^{\,r+1}-X_1^{\,r+1})}{B.X_2^{\,r}.(X_2-X_1)} \tag{18}$$

$$\frac{V}{Vc}=\frac{F.(X_2^{\,r+1}-X_1^{\,r+1})}{X_2^{\,r}.(X_2-X_1)} \tag{19}$$

Multiplicando y dividiendo por X_2, obtenemos,

$$\frac{V}{Vc}=F \quad \times \quad \frac{1-\dfrac{X_1^{(r+1)}}{X_2^{(r+1)}}}{1-\dfrac{X_1}{X_2}} \tag{20}$$

Pero X puede expresarse en función del área, si A = B . X^r, entonces, $X=\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{r}}$ (21)

y reemplazando y simplificando, queda,

$$\frac{V}{Vc}=F.\frac{1-(A1/A2)^{\frac{r+1}{r}}}{1-(A1/A2)^{\frac{1}{r}}} \tag{22}$$

Por lo tanto,

$$V=Vc.F.\frac{1-(A1/A2)^{\frac{r+1}{r}}}{1-(A1/A2)^{\frac{1}{r}}} \tag{23}$$

Pero,

$$Vc.F=\frac{1}{(r+1)}\,A_2\;L\;\frac{1-(A_1/A_2)^{\frac{r+1}{r}}}{1-(A_1/A_2)^{\frac{1}{r}}} \tag{24}$$

y, finalmente llegamos a la expresión general,

$$Vc.F=\frac{A_2\;L}{(r+1)}\;\frac{1-(A_1/A_2)^{\frac{r+1}{r}}}{1-(A_1/A_2)^{\frac{1}{r}}} \tag{25}$$

Aplicando esta última fórmula para los distintos modelos, obtenemos las fórmulas empíricas para las formas truncadas de los cuatro modelos que estamos tratando, y que se indican a continuación,

Cilindro: $V=A_2.L=A.L$ (26)

Parabolide $$V = L \times \frac{(A_1 + A_2)}{2} \qquad (27)$$

Cono: $$V = L \times \frac{(A_1 + \sqrt{A_1 . A_2} + A_2)}{3} \qquad (28)$$

Neiloide: $$V = L \times \frac{(A_1 + 3.\sqrt{A_1^{\,2} . A_2} + 3.\sqrt{A_1 . A_2^{\,2}} + A_2}{4} \qquad (29)$$

El empleo de la ecuación general requiere del conocimiento del valor de r. Una forma de determinar el valor de la constante r es mediante la siguiente fórmula:

$$r = \frac{\log Y_2 - \log Y_1}{\log X_2 - \log X_1}$$

Desafortunadamente, esta fórmula no puede aplicarse a sólidos truncados, siendo que la altura al vértice nos es desconocida. Por su parte, el empleo de las fórmulas específicas requiere que se conozca la forma del sólido. Para eliminar estas dos limitaciones se recurre a la fórmula de Newton.

4. FORMULA DE NEWTON

Ahora vamos a presentar una fórmula de cubicación, conocida como fórmula de Newton o fórmula de Cavalieri, capaz de eliminar las limitaciones indicadas en el párrafo anterior. La fórmula de Newton, como vamos a llamarla, brinda resultados exactos para los cuatro modelos y, generalizando, para cualquier sólido cuya sección transversal pueda expresarse mediante un polinomio de tercer grado. La ventaja de esta fórmula es que recurre a los mismos elementos cualquiera sea la forma del sólido. Tomaremos como referencia la Figura 4.

Figura 4.-

Comencemos por expresar el radio del sólido (Y) y el área transversal asociada (A):

$$Y = b\,(X + m)^{r} \qquad y \qquad A = B\,(X + m)^{2r}$$

por lo tanto,

para el cilindro (r=0)A = B

para el paraboloide (r=1/2) $A = B.m + BX$

para el cono (r=1) $A = B(X^2 + 2.X.m + m^2) = B.m^2 + 2.B.X.m + B.X^2$

para el neiloide (r=3/2) $A = B(X3 + 3.X^2.m + 3.Xm^2 + B.X3$
$= B.m3 + 3.Bm^2.X + 3.B.m.X^2 + B.X3$

lo que demuestra porqué la fórmula es válida para cualquier sólido cuya sección quede expresada por un polinomio de tercer grado:

$$Area = a_o + a_1\,X + a_2\,X^2 + a_3\,X^3$$

Determinando el volumen entre 0 y L mediante cálculo integral, arribamos a la siguiente ecuación,

$$V = \frac{L}{6}\left(6.a_0 + 3.a_1.L + 2a_2.L^2 + \frac{3}{2}\,a_3\,L^3\right)$$

Pero las áreas A_1, A_2 y Am, toman la siguiente forma:

$A_1 = a_o$

$A_2 = a_o + a_1.L + a_2.L^2 + a_3.L^3$

$Am = a_o + (1/2).a_1.L +(1/4).a_2.L^2 + (1/8).a_3.L^3$

por lo que resulta, que

$$(A_1 + 4.Am + A_2) = (6.a_o + 3.a_1.L + 2.a_2.L^2 + (3/2).a_3.L^3)$$

Por lo tanto, la fórmula de Newton adopta finalmente la siguiente forma,

$$V = L \times \frac{A_1 + 4Am + A_2}{6}$$

donde A_1 es el área de la sección menor, A_2 es el área de la sección mayor, Am es el área en el punto medio de la pieza y L la longitud del cuerpo. Puede verse, tal como se mencionó, que la fórmula de Newton adopta una única forma para cualquiera de los cuatro modelos seleccionados.

5. FORMULAS DE PRESSLER Y DE HOSSFELD

Tomemos un modelo sólido completo y definamos como Hd la distancia entre su base y el punto donde el diámetro de la base se reduce a la mitad. Pressler llamó a esta altura Hd altura directriz (también llamada altura de Pressler). Con estos elementos, Pressler desarrollo la fórmula general del volumen del sólido, que toma la siguiente forma,

$$A = \frac{Ab.Hd.4^{\frac{1}{r}}}{(r+1)(4^{\frac{1}{r}}-1)}$$

donde Ab es el área de la base del sólido. Si aplicamos la fórmula general a las formas paraboloide, cono y neiloide, obtenemos las siguientes fórmulas específicas,

paraboloide y cono : V = 0,6666 . Ab . Hd
neiloide : V = 0,6756 . Ab . Hd

Sobre esta base, Pressler definió la siguiente fórmula general:

$$V = \frac{2}{3}\,Ab.\,Hd$$

que brinda resultados exactos cuando el sólido es paraboloide o cono, con un error de -1,33% para la forma neiloide. La fórmula volumétrica de Pressler fue rescatada del olvido por W. Bitterlich, al incorporarla como método en el Relascopio de Espejo.

Por su parte Hossfeld propuso emplear el área de la sección situada a 1/3 de la altura total, a partir de la base. Esta fórmula es exacta para paraboloides y conos, con un error de +12,5% para neiloides.

6. FORMULAS COMERCIALES

Como su nombre lo indica, las fórmulas comerciales son aquellas fórmulas que se aplican para estimaciones con propósitos comerciales. Su aplicación es independiente de la forma real del tronco, fuste o rollo, y por razones de practicidad adoptan formas sencillas. Entre estas fórmulas se destacan la de Huber y la de Smalian, que toman las siguientes formas,

HUBER: $$Vol = Am.\, L$$

SMALIAN: $$Vol = \frac{(A_1 + A_2)}{2} \times L$$

donde A_1 y A_2 son las áreas de las dos secciones límite de la pieza; Am, es el área de la sección situada en el punto medio de la pieza; y L es la longitud de la pieza.

Ambas fórmulas dan resultados exactos para las forma de cilindro y paraboloide. Para las formas cónica y neiloide, ambas fórmulas brindan valores aproximados. La fórmula de Huber subestima el volumen del cono y del neiloide, en tanto que la fórmula de Smalian lo sobreestima. En ambos casos, el error se reduce cuanto más próximo al cilindro a al paraboloide sea la pieza.

Otra alternativa, articularmente para troncos y fustes completos, donde en virtud de las irregularidades en las caras extremas dee la pieza no es conveiente basar la medición en dihas caras, pede usarse la que se conoce como fórmula generalizada de Newton, que en realidad es una familia de curvas. Estas curvas derivan de un modelo general, que es:

$$V = L.\left[\alpha(A^{*} + A^{**}) + \beta.\, Am\right]$$

donde A* y A** son las áreas de las secciones extremas consideradas, distanciadas Ex del límite correspondiente y simétricas respecto de Am, el área en el punto medio; L es el largo real de la pieza; α y β son constantes (Fig.5).

Figura 5.-

Las secciones A* y A** se hallan distanciadas una longitud Ex de las caras extremas A_1 y A_2. Para respetar el comportamiento original de la fórmula de ñewton, α, β y Ex deben cumplir ciertas condiciones; estas condiciones son:

$$0 \leq Ex \leq L/2$$

$$\alpha = \frac{1}{6.(1-2Ex)^2}$$

$$\beta = 1 - 2\alpha$$

De la combinación de estos componentes surge un sinnúmero de ecuaciones, el forestal deberá hacer uso de aquella que sea la más ventajosa. Por ejemplo, si las secciones A* y A** se toman a una distancia de los extremos equivalente a 1/4 de L (Ex = 1/4; α =2/3 y β = -1/3); se origina la siguiente ecuación:

$$V = \frac{L}{3}\left[2.(A_{1/4} + A_{3/4}) - Am\right]$$

7. CUBICACION DE ALTA CALIDAD

Por cubicación de alta calidad entendemos la cubicación basada en la medición de sucesivos diámetros a lo largo de la pieza. Por ejemplo, midiendo el diámetro a los 0.30 m, 1.30 m, 3.30, 5.30 m, y así sucesivamente.Hechas las mediciones, la cubicación propiamente dicha puede hacerse por dos vías: a) vía analítica, mediante el empleo de las fde Huber y/o Smalian; y b) gráficamente, con auxilio de planimetría.

7.1 Método analítico

Parte del supuesto de que las seciones intermedias en que se puede separar un tronco o fuste, son asimilables a fracciones de paraboloides. El volumen de cada una de estas secciones puede medirse con alguna de las fórmulas que brindan resultados exactos para esa forma sólida, generalmente las de Huber y/o la de Smalian, udiéndose combinar fdistintas dentro de un mismo tronco o fuste.

7.2 Método gráfico o planimétrico

A partir de los datos de diámetro y altura de medición se grafica el área ransversal en función de la altura. Se dibuja a mano una curva que siga la tendencia de los puntos. Mediante planímetro, se detrima el área encerrada por la curva y el eje X. De acuerdo con la escala del dibujo, se establee la relación m3 de volumen por cm2 de área; esta relación se expande a toda el área.

8. CUBICACION DE ARBOLES EN PIE

Para la cubicación de árboles en pie hay dos asuntos delicados que se deben tomar en cuenta: la necesidad material de mediciones rápidas y la necesidad de mediciones económicas compatibles on el producto leñoso.

Si bien las fórmulas desarrolladas para árboles apeados so también aplicables en este caso, el uso de fórmulas que requieren de diámetros y distanias poco accesibles desde el suelo no es práctico. El empleo de dendrómetros o la trepada al árbol no se justifican. En consecuencia, la cubicación en estas condiciones se hace, con frecuencia, a partir de la medición de un diámetro y una altura accesibles desde el suelo y sobre la base de ecuaciones empíricas basadas en esas mismas mediciones. En este caso, se requieren ensayos previos parala especie en cuestión, sobre material vegetando en condiciones semejantes a las de los individuos a cubicar. Estas fórmulas empíricas se basan en la observación de una cantidad variable de árboles y representan un comportamiento promedio; por eso, cuando se considera sólo un individuo el error puede ser grosero. No obstante, para un conjunto numeroso de árboles los errores tienden a compensarse y el resultado no se alejará, en general, de la aproximación exigida en los inventarios que sirvan, por lo menos, de apoyo a las transacciones comerciales.

Sobre bases empíricas para cubicación de árboles en pie podemos mencionar: a) el uso del coeficiente de forma; y b) las ecuaciones de volumen.

Coeficiente de forma

Si asumimos que para individuos de una misma especie, sujetos al mismo régimen y modo de tratamiento, vegetando en condiciones agroclimáticas semejantes y pertenecientes a la misma clase diamétrica, puede admitirse una forma constante del tronco y, en consecuencia, la constancia en el volumen. El procedimiento consiste en definir un indicador de la forma media para distintas clases diamétricas para que a partir del dap yde la altura pueda obtenerse el volumen. El coeficiente de forma aparece como el índice capaz de traducir la forma media. Por definición:

F = volumen real/volumen de un cilindro

El coeficiente F a emplear dependerá del cilindro que se tome para la coparación. Atualmente, se toma como diámetro del cilindro el dap (a 1.30 m) y el coeficiente obtenido es el coeficiente de forma ordinario, expresado teóricamente por:

$$F = \frac{1}{(r + 1)} \left[\frac{H}{H - 1{,}30 \text{ m}} \right]^{r}$$