CAPÍTULO 3: CUBICACIÓN Y FORMA DE ÁRBOLES

POR: ENRIQUE WABO.

1 VOLUMEN

1.1 Introducción

En ocasiones necesitamos conocer la cantidad de material leñoso presente en un árbol, lo que nos lleva a la necesidad de contar : a) con alguna forma de expresión de esa cantidad y b) con algún método para su determinación. Una cantidad de madera puede expresarse como: a) volumen, sólido o apilado, b) peso (seco o húmedo), c) número de piezas de dimensiones determinadas.

1.2 Definición y unidades de volumen

Un volumen se define como: *el contenido sólido o capacidad de contenido sólido de un cuerpo*. En este momento nos interesa el volumen como contenido sólido, al que llamaremos *volumen solido*, que ha sido y sigue siendo el más importante. El volumen sólido de madera de un árbol se puede expresar mediante dos tipos de unidades, que son: a) las *unidades nominales* y b) las *unidades cúbicas*.

Las *unidades nominales* expresan el volumen sólido en términos de algún producto final; como si se expresara el rendimiento de un cultivo de trigo en términos de bolsas de harina. La unidad de medida de este tipo más difundida es el pie cuadrado, que es el volumen sólido presente en una pieza indivisible de 1 pie de largo, 1 pie de ancho y 1 pulgada de espesor; típica de la industria del aserrado.

Las *unidades cúbicas* expresan el volumen sólido real contenido en la pieza observada; las unidades de expresión usuales en nuestro medio son el metro cúbico y el decímetro cúbico. Al volumen expresado en unidades cúbicas lo llamamos Volumen Cúbico; de aquí en más nos ocuparemos expresamente del volumen cúbico de un árbol.

1.3 Formas de expresión del volumen cúbico

La expresión "volumen de madera" es impreciso si no va acompañada de términos que permitan conocer su naturaleza, lo que nos lleva a la necesidad de contar con expresiones indicadoras. Estas expresiones son indicadores de: a) la calidad de la madera, b) las partes involucradas, c) la extensión de la pieza, y d) la inclusión o no de la corteza.

a) Calidad de la madera. Si el volumen expresado no ha sufrido descuentos por calidad, se habla de *Volumen Bruto* (= vol. útil + vol. no útil). Si tales descuentos se han llevado a cabo se habla de *Volumen Neto* (= vol. útil). La obtención del volumen neto obliga a una serie de observaciones y operaciones complejas, razón por la cual nos vamos a dedicar al volumen bruto, es decir, al volumen cúbico bruto.

b) Partes involucradas. Es necesario aclarar a qué parte o partes del árbol corresponde el volumen citado. Los principales son: tronco y ramas. Podemos referirnos a sólo uno de estos componentes, el tronco, por ejemplo, entonces hablamos del Volumen Bruto o Volumen Neto del tronco; o podemos referirnos a más de uno, por ejemplo tronco y ramas, y hablamos del Volumen Bruto o Volumen Neto de tronco y ramas.

c) Extensión de las piezas. Debe aclararse si el volumen comprende completamente o parcialmente a las piezas indicadas. Para ello debemos definir límites para las piezas. Estos límites, son:

- *Extremo grueso* (sección inferior)
  - De troncos: puede ser el nivel del suelo, el límite superior del tocón, o un diámetro máximo.
  - De ramas: puede ser su inserción sobre el tronco (base de la rama), o un diámetro máximo.
- *Extremo delgado* (sección superior)
  - De troncos: puede ser el límite físico de la pieza o un diámetro mínimo.
  - De ramas: puede ser el límite físico de la pieza o un diámetro mínimo.

Cuando el límite superior es el límite físico de la pieza decimos que la pieza se extiende hasta el diámetro cero y el volumen se suele denominar Volumen Total de la pieza; cuando el límite superior es un diámetro mínimo, se denomina VOLUMEN DE MADERA ROLLIZA de la pieza. Cuando el volumen corresponde a alguna actividad específica se suele llamar Volumen Comercial.

d) Inclusión de la corteza. Se debe aclarar si el volumen incluye o no a la corteza. Cuando no se hace aclaración se asume que la corteza está incluida; sin embargo, lo usual es tener interés en el volumen sin corteza.

En el siguiente cuadro se señalan algunos ejemplos de expresión de volumen.

Objeto físico	Límite Inferior	Límite Superior	Nivel de Calidad	Nombre
Tronco	Tocón	Punto de Inicio copa	Bruto	Vol. Bruto del Tronco
Tronco	Tocón	d = 7 cm	Neto	Vol. Neto de Madera Rolliza del Tronco
Tronco + ramas	Tocón + Inserción	d = 0 cm	Bruto	Vol. Neto Total de Tronco y Ramas

2 CUBICACION DE ARBOLES

Entendemos por cubicación de árboles, la determinación del volumen cúbico sólido contenido en árboles individuales.

Veremos tres mecanismos: a) mediante el uso de fórmulas volumétricas, b) mediante el método gráfico, y c) mediante curvas de perfil.

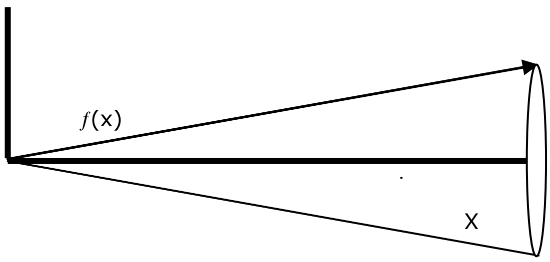
2.1 Fórmulas Volumétricas

Son fórmulas matemática sencillas que utilizamos para calcular el volumen de troncos y ramas, sin tomar en cuenta su forma real; y se pueden aplicar en árboles apeados y en árboles en pie. Con el fin de estudiar el compòrtamiento matemático de estas fórmulas, se admite que la forma del tronco del árbol puede asimilarse a un sólido de revolución, que surge al hacer rotar una función matemática alrededor del eje de las X. En la práctica forestal se han empleado 4 modelos de revolución, que se conocen con el nombre de Prototipos o Tipos Dendrométricos.

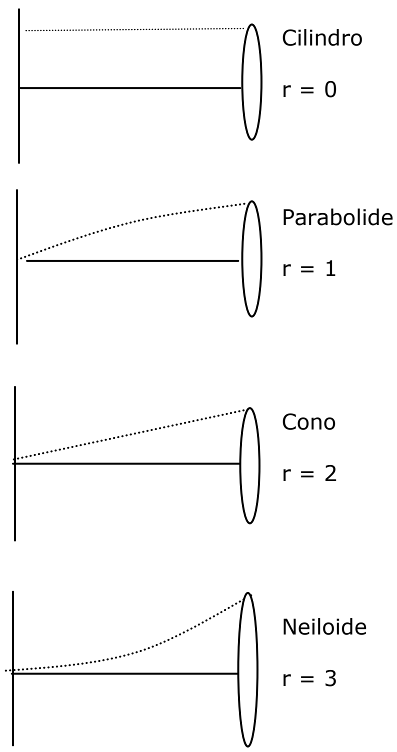
Los cuatro prototipos utilizados se generan por la rotación alrededor del eje X de la siguiente función:

$$Y = K \sqrt{X^r}$$

donde Y es el radio del sólido a la distancia X, K una constante de amplitud y r el parámetro que define la forma de la curva. La rotación alrededor del eje X de una línea recta $f(x) = b$, originar un cono:



A continuación se indican las formas de los perfiles y los valores r asociados, para cada uno de los cuatro modelos.



La fórmula $Y = K \sqrt{X^r}$ expresa el radio del sólido en función de la distancia desde el origen. Como en el área forestal es más común expresarse en términos de diámetro, convertimos dicha ecuación en la siguiente:

$$d_X = b \sqrt{X^r} \tag{1}$$

Si indicamos con A el área correspondiente a la base del sólido y con H su longitud total (altura total), entonces:

$$A = \frac{\pi}{4} d_x^2 = \frac{\pi}{4} b^2 X^r \tag{2}$$

y el volumen de la pieza completa, obtenida mediante cálculo integral, toma la siguiente forma:

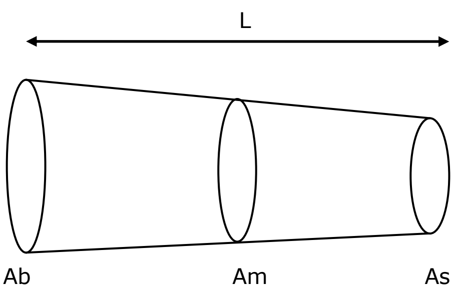
$$V = \frac{\pi}{4} b^2 \int_0^H X^r \, dx = \frac{\pi}{4} b^2 \frac{H^{(r+1)}}{r+1} = \frac{A \times H}{(r+1)} \tag{3}$$

Finalmente, podemos expresar el volumen de un sólido completo con la fórmula:

$$V = \frac{A \times H}{(r+1)} \tag{4}$$

Actualmente, las fórmulas volumétricas más usadas son las de Huber, de Smalian, y del Cono; en menor medida se utilizan las fórmulas de Newton y del Cono Truncado. A continuación se indica para cada modelo dendrométrico las fórmulas que dan resultados exactos. Los términos empleados son los siguientes:

Ab: área de la sección inferior o base de la pieza
Am: área en el punto medio de la pieza
As: área de la sección superior de la pieza
L : longitud de la pieza



<u>Fórmulas:</u>

Huber: $V = L \times Am$

Smalian: $V = L \times \frac{(Ab + As)}{2}$

Cono: $V = (1/3) \times Ab \times L$

Newton: $V = L \times \frac{(Ab + 4\,Am + As)}{6}$

Cono truncado $V = L \times \frac{(Ab + \sqrt{Ab.As} + As)}{3}$

La Tabla 1 muestra el comportamiento de las fórmulas mencionadas para la forma paraboloide (P), cono (C) y neiloide (N).

TABLA 1

FORMULA	P	C	N
Huber	Exacta	Subestima	Subestima
Smalian	Exacta	Sobrestima	Sobrestima
Cono	Subestima	Exacta	Sobrestima
Newton	Exacta	Exacta	Exacta
C. truncado	Subestima	Exacta	Sobrestima

Que una fórmula sea exacta para un modelo no impide que se la pueda aplicar en otro, aunque el resultado no sea siempre exacto. El comportamiento esperado de cualquiera de estas fórmulas dependerá del modelo al que más se aproxime la pieza medida.

2.1.1 Cubicación Simple

En la cubicación simple aplicamos la fórmula volumétrica elegida a toda la pieza, tronco o rama; en este caso los errores debido a la forma de la pieza son máximos.

2.1.2 Cubicación Compuesta

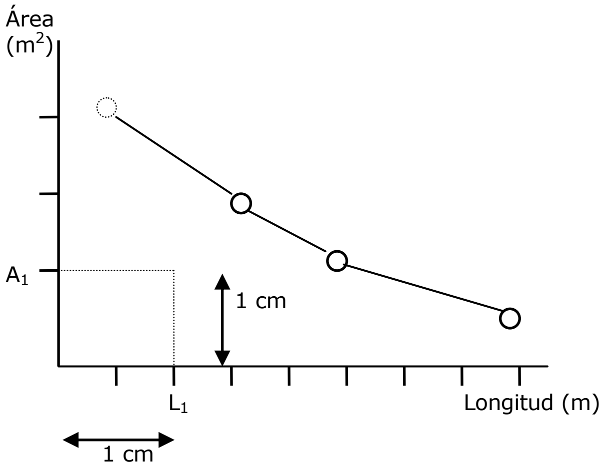
En la cubicación compuesta, la pieza se divide en porciones más pequeñas y se miden sucesivos diámetros a lo largo de la pieza, a distancias conocidas. A cada "porción" en que se ha dividido la pieza original se le calcula el volumen mediante el empleo de la fórmula de Huber o de Smalian; el volumen total se obtiene por la suma de estos volúmenes parciales. Se pueden combinar ambas fórmulas sobre la misma pieza.

El método supone que las secciones intermedias en que se separa una pieza son asimilables a fracciones de paraboloide si su longitud no es excesiva, con lo cual la fórmula empleada daría resultados casi exactos para cada fracción. La fórmula del cono se reserva para el extremo final del tronco en especies de eje único (excurrente).

2.2 Método gráfico

Se miden diámetros a distintas alturas de la pieza, como en la cubicación compuesta, y se determinan las áreas transversales correspondientes. Las áreas transversales se grafican en función de su altura de ubicación y se dibuja a mano una curva que siga la tendencia de los puntos. Se mide el área encerrada por la curva; antiguamente se usaba el planímetro, pero actualmente se pueden usar programas de PC.

El área medida se debe convertir a volumen. Para ello se debe establecer la relación entre el volumen y una porción de área del dibujo. Por ejemplo, dibujamos un cuadrado de 1 cm de lado y determinamos el volumen correspondiente según las unidades indicadas en los ejes; esta relación se expande a toda el área. A continuación se indica un ejemplo.



El producto entre los valores de la escala: A_1 (m²) × L_1 (m) representa el volumen en m^3 representado por un cuadrado de superficie de 1 cm^2 en el dibujo, medidas obtenidas con regla; la proporción m^3/m^2 se lleva a la superficie total medida.

2.3 Método de la curva de perfil del fuste

Se debe contar con una función que represente la sección del tronco a diferentes alturas. Una vez definida esta función, se puede calcular el volumen total de la pieza o de una parte de ella entre dos alturas H_1 y H_2. Tomemos como ejemplo el siguiente modelo, utilizada por Kozak para ciertas coníferas:

$$\frac{dh^2}{dap^2} = b_0 + b_1\left(\frac{h}{H}\right) + b_2\left(\frac{h}{H}\right)^2 \qquad (5)$$

dh : diámetro a la altura h.
Dap: diámetro a la altura del pecho
h: altura a la que se mide el diámetro de una sección.
H : altura total

Una vez determinados los parámetros del modelo (b_0, b_1 y b_2) se puede calcular el cuadrado del diámetro a cualquier altura h del tronco:

$$dh^2 = dap^2\left[b_0 + b_1\left(\frac{h}{H}\right) + b_2\left(\frac{h}{H}\right)^2\right] \qquad (6)$$

O lo que es equivalente, el área transversal a_h a esa misma altura, si multiplicamos ambos términos por $\pi/4$ obtenemos:

$$a_h = g\left[b_0 + b_1\left(\frac{h}{H}\right) + b_2\left(\frac{h}{H}\right)^2\right] \qquad (7)$$

siendo g el área basal. Finalmente, el volumen entre dos alturas cualesquiera h1 y h2 surge por cálculo integral:

$$Vol_{(h1-h2)} = g\int_{h1}^{h2}\left[b_0 + b_1\left(\frac{h}{H}\right) + b_2\left(\frac{h}{H}\right)^2\right]$$

3 CUBICACIÓN DE ÁRBOLES EN PIÉ

3.1 Mediante fórmulas volumétricas

Las fórmulas volumétricas indicadas también son aplicables a árboles en pie. Para medir diámetros a diferentes alturas hay dos alternativas. Una, es mediante la trepada al árbol. La segunda, es midiendo los diámetros desde el suelo mediante el empleo de un dendrómetro. Sin embargo, ambos métodos se justifican sólo en algunos casos, ya que debemos compatibilizar las mediciones con la calidad del producto leñoso que estamos midiendo.

Cuando se requiere información acerca del volumen contenido en árboles en pie y el uso de un dendrómetro o la trepada al árbol no se justifica, es usual que la cubicación se reemplace por una estimación. Para ello se puede recurrir al uso de factores de forma, al uso de ecuaciones y tablas de volumen, al uso de la fórmula de Pressler, o recurrir al método del árbol promedio.

3.2 Fórmula de Pressler

Pressler definió como altura directriz (Hd) a la distancia entre el diámetro de la base de un sólido modelo y el punto en donde dicho diámetro se reduce a su mitad. A partir de la altura directriz se obtiene la siguiente fórmula general de volumen para los modelos:

$$V = \frac{Ab \times Hd \times (4^{\frac{1}{r}})}{(r+1)(4^{\frac{1}{r}} - 1)} \qquad (8)$$

donde Ab es el área de la base del sólido. Aplicando la fórmula (8) se obtienen las siguientes fórmulas específicas de volumen:

PARABOLOIDE	$= 0{,}6666 \times Ab \times Hd$	(9a)
CONO	$= 0{,}6666 \times Ab \times Hd$	(9b)
NEILOIDE	$= 0{,}6756 \times Ab \times Hd$	(9c)

Sobre esta base Pressler definió la siguiente fórmula general de volumen:

$$V = \frac{2}{3} \times Ab \times Hd \qquad (10)$$

Esta fórmula, conocida como Fórmula de Pressler, brinda resultados exactos cuando el sólido es paraboloide o cono, con una ligera subestimación para el neiloide.

4 DETERMINACIÓN DEL VOLUMEN DE MADERA APILADA

Cuando las piezas involucradas son de pequeñas dimensiones y de baja calidad, se recurre al volumen de madera apilado. Por ejemplo, es el caso de la leña con destino a pasta para celulosa o carbón.

El volumen se expresa en metros cúbicos estéreos o simplemente estéreos. Un metro cúbico estéreo o estéreo es el volumen de madera sólida apilada que estaría contenida en un cubo de 1 m de lado. Así, el volumen estéreo contiene volumen sólido y "aire" en proporciones variables. En la práctica la madera se apila entre postes que conforman un paralelepípedo de 1 m de alto; aunque el largo y el ancho no tiene dimensiones predefinidas.

La relación entre el volumen sólido y el volumen estéreo recibe el nombre de Coeficiente de Cubicación o Factor de Cubicación:

$$\text{Coeficiente de Cubicación} = Cc = \frac{\text{Volumen Sólido}}{\text{Volumen Estéreo}} \qquad (11)$$

El coeficiente Cc permite convertir metros cúbicos estéreos en metros cúbicos sólidos.

La relación entre el volumen estéreo y el volumen sólido recibe el nombre de Coeficiente de Apilamiento o Factor de Apilamiento:

$$\text{Coeficiente de Apilamiento} = Ca = \frac{\text{Volumen Estéreo}}{\text{Volumen Sólido}}$$

(12)

El coeficiente Ca permite convertir metros cúbicos sólidos en metros cúbicos estéreos. Nótese que Cc = 1/Ca.

Si todas las piezas apiladas tuviesen forma exactamente cilíndrica y la misma longitud, sería Cc = $\pi/4$ = 0,7854; en la práctica varía entre 0,40 y 0,80. Por su parte, sería Cp = $4/\pi$ = 1,2732. Para determinar el volumen sólido se suele recurrir a la fórmula de Smalian, midiendo todos los diámetros de ambos extremos de la "caja".

Los coeficientes de cubicación y de apilamiento dependen de la forma de las piezas y del modo en que se acomoden dentro de la pila. Si se combinan extremos finos con extremos gruesos el aprovechamiento espacial mejora y el valor del coeficiente Cc aumenta.

5 MÉTODOS PARA EL ESTUDIO DE LA FORMA DEL TRONCO

Desde hace tiempo que se pretende representar la forma del tronco mediante un número abstracto que sea independiente del Dap y de la altura, y que aún no ha sido hallado. No obstante, se han desarrollado diferentes mecanismos que, mediante números, orientan acerca de la forma del tronco. Los más difundidos son cuatro: 1) Factores de forma; 2) Cocientes de forma; 3) Punto de forma; y 4) Curvas de ahusamiento.

5.1 Factor de forma

Surgió como una herramienta para determinar el volumen del tronco de árboles en pie y se basa en la relación entre el volumen de la pieza y el de un cuerpo geométrico regular de forma conocida y de iguales dimensiones que la pieza. Es decir:

$$\text{F. de Forma} = \frac{\text{Volumen Real de la Pieza}}{\text{Vol. del Cuerpo de Referencia}} \qquad (13)$$

Por lo tanto, el volumen real del cuerpo (V) surge de multiplicar el volumen del cuerpo de referencia o *volumen aparente* (Va) por el *factor de forma* (f):

$$V = Va \times f \qquad (14)$$

La forma geométrica actualmente utilizada es la del cilindro, cuya altura y diámetro corresponden a la altura y diámetro del árbol respectivamente; recibe el nombre de *Factor de Forma Cilíndrico*. Hay disponibles dos factores de forma cilíndricos: a) el artificial y b) el natural.

5.1.1 Factor de Forma Cilíndrico Artificial (f)

El área de la base del cilindro es el área basal del árbol (g) y su longitud es la longitud del tronco (L), que puede ser reemplazada por la altura total del árbol. Se lo representa con la letra f. El factor de forma f se expresa como:

$$f = \frac{\text{Volumen Real}}{g \times L} \qquad (14)$$

El producto g × L representa el Volumen Aparente (volumen sin considerar la forma).

En rigor, f no es un indicador de la forma del tronco, ya que:

a) dos árboles de igual f no tienen necesariamente la misma forma: y

b) dos árboles con igual forma y distinto tamaño no tienen igual factor f.

Acomodando los términos de la fórmula del volumen obtenemos:

$$\text{Volumen Real} = g \times L \times f \qquad (15)$$

En la práctica se determinan valores promedios para el conjunto de todos los árboles involucrados; una vez determinado este factor promedio el volumen de un tronco se estima como su producto con el volumen aparente.

La determinación del valor promedio puede hacerse para toda la población de árboles o por clases de diámetro. Una fórmula de estimación común, calculado a partir de una muestra de n árboles, es:

$$f = \frac{\sum V}{\sum g \times h} \qquad (16)$$

También puede aplicarse un modelo matemático que exprese el factor f en función del dap.

5.1.2 Factor de Forma Cilíndrico Natural

En lugar de usar el área basal utiliza al área correspondiente a la sección situada al 10% de la altura del árbol. Fue desarrollado por Hohenadl con el fin de que dos árboles con igual forma muestren igual factor; se lo indica con f'. La necesidad de medir alturas ha limitado su uso.

5.1.3 Factor de Altura - Forma

La fórmula del volumen del tronco de un árbol se representa por: v = g.h.f , donde h es la altura del árbol. Al producto (h × f) lo podemos considerar como una única variable, que recibe el nombre de factor de altura/forma o altura reducida. Representa la altura por la cual se debe multiplicar **g** para obtener el volumen.

5.2 Cociente de forma

Asocia la forma del tronco con la tasa de reducción del diámetro. Se lo representa con la letra q y es técnicamente la razón entre un diámetro medido por encima del 1,30 m y el dap:

$$q = \frac{\text{Diámetro por encima de 1,30 m}}{\text{Dap}} \qquad (17)$$

Su uso es a través de la clasificación de árboles en clases de cocientes de forma. Se asume que árboles de una misma clase tienen entre si forma más parecida que con árboles de otras clases y, por extensión, mayor similitud en sus volúmenes si sus dimensiones son similares. Existen tres tipos de cociente de forma: a) el normal, b) el absoluto y c) el cociente de forma de Girard.

El Cociente de Forma Normal, comenzó a usarse en 1899, toma el diámetro superior a la mitad de la altura del tronco. En 1910 Jonson propuso medir el diámetro superior a la mitad de la distancia entre 1,30 m y el extremo del tronco, dando lugar al Cociente de Forma Absoluto. El Cociente de Forma de Girard recurre al diámetro sin corteza del extremo de la primera pieza aprovechable y se expresa en por ciento del dap. Muy usado en E.E.U.U.

5.3 Punto de Forma

Este indicador aparece en el año 1912 y representa la razón entre la altura hasta el centro de resistencia al viento y la altura total del árbol, expresada en por ciento. Su principal utilidad es que permite predecir en forma sencilla el cociente de forma absoluto, ya que hay una buena relación entre ambos. La principal dificultad es medir la altura al punto de resistencia y la altura total.

5.4 Curva analítica del perfil

Son funciones matemáticas que permiten representar el perfil medio de los árboles. Ya se mencionó cuando se trató el tema de volumen. La distribución del diámetro a lo largo de su eje se conoce como *Perfil del Tronco* y como *Curva de Ahusamiento* a la curva con la cual pretendemos representarlo; por su parte, la curva directriz es la curva generada por un modelo.

BIBLIOGRAFÍA

Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento. Vol.1 Estimación del volumen forestal. Estudio FAO: Montes 22/1.

Julio 2002