Introducción a la Investigación de Operaciones

Unidad didáctica 3: Extensiones de la programación lineal

- **Alcance:** En esta unidad didáctica (…). Todos los modelos que se presentarán pueden ser considerados prototípicos y el abordaje para su estudio se hará a partir de las similitudes y diferencias con el problema de la programación lineal.

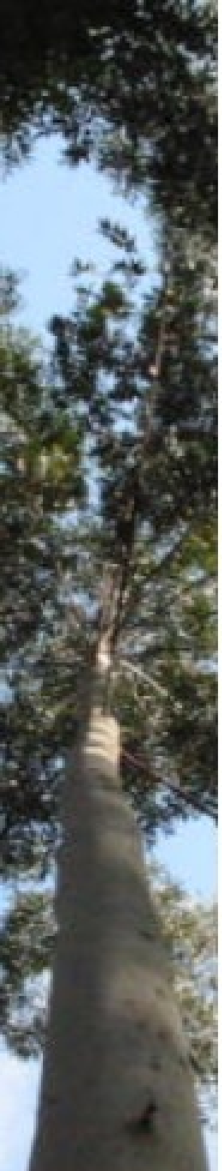
- **Contenidos:** Modelos de redes. Caracterización de las redes. Los modelos de transporte y asignación, árbol de la mínima expansión, ruta más corta, flujo máximo y flujo de mínimo costo. Fundamentos y aplicaciones. El modelo lineal, su formulación y solución.

- **Contenidos:** Gestión de proyectos. El método del camino crítico (CPM). El modelo lineal, su formulación y solución. La técnica de evaluación y revisión de programas (PERT). El modelo estocástico, su formulación y solución.

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

Universidad Nacional de La Plata

La Plata – Julio del 2020 – Pablo Yapura



Modelos de Redes

En el contexto de la Investigación Operativa, los modelos de redes refieren al conjunto especial de problemas en los que la **geometría de la posición**, espacial pero también temporal, es una característica relevante.

● ● ☼ ☼ ☼ ● ●

Se ha desarrollado una terminología específica que conviene tener presente. Un **diagrama** (o *grafo*) está constituido por un conjunto de uniones o intersecciones llamados **nodos**, los que se unen entre sí por **vínculos** (**arcos** o **ramas**). Una **red** es un diagrama al que se asociaron medidas cuantitativas a los vínculos y/o nodos.

● ● ☼ ☼ ☼ ● ●

Una secuencia de vínculos que conectan dos nodos cualesquiera conforman una **cadena**. Si se especificó una dirección de flujo a lo largo de la cadena, entonces se habla de **ruta** o **camino**. Un **ciclo** es una cadena que conecta a un nodo consigo mismo (*i.e.* el nodo origen es el de destino).

Modelos de Redes

Una diagrama **conectado** es aquel en el que hay una cadena conectando a cada par de nodos. Un **árbol** es un diagrama o red conectada que no contiene ciclos.

● ● ☼ ☼ ☼ ● ●

En muchos modelos nos interesarán los vínculos **dirigidos** u **orientados**, en los que se ha dado un sentido o dirección al mismo de modo que se puede identificar uno de los nodos como el origen y el otro como el destino. Así, se hablará de un diagrama o **red dirigida** cuando todos los arcos sean orientados.

● ● ☼ ☼ ☼ ● ●

Todos los problemas que se estudiaran pueden ser planteados como casos especiales del problema de la PL. No obstante, para todos ellos se han desarrollado **algoritmos especiales** que los resuelven más eficientemente.

El Modelo de Transporte

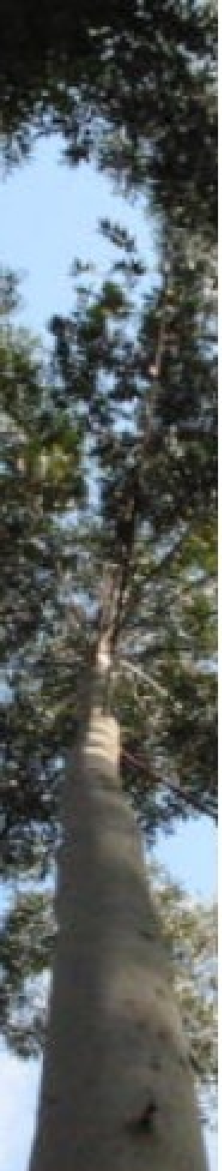
El modelo se ha desarrollado para distribuir de manera óptima bienes o servicios desde **múltiples fuentes** hacia **múltiples destinos**.

● ● ☼ ☼ ☼ ● ●

El objetivo es minimizar alguna medida de la eficiencia en la distribución (costos, distancias, tiempos). Las variables de decisión, $\boldsymbol{x_{i,j}}$, denotan la cantidad de bienes o servicios que se transportarán desde la fuente ***i*** hasta el destino ***j***.

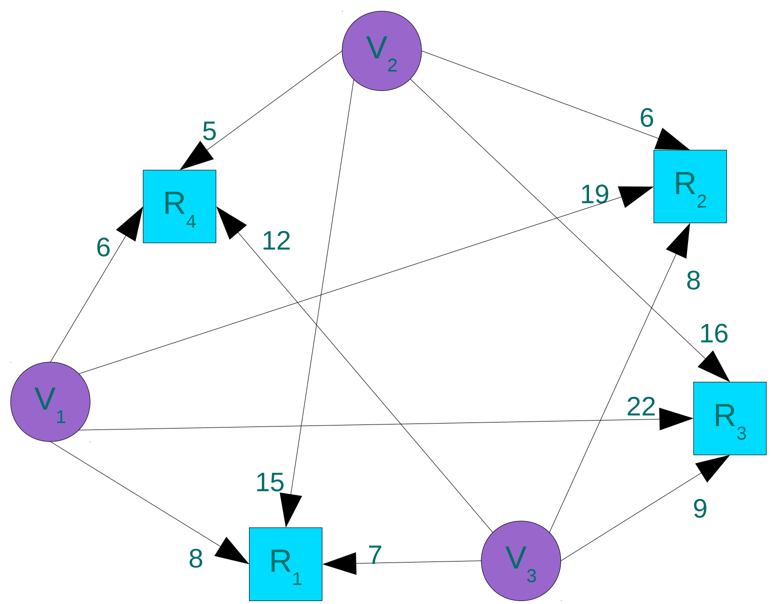
● ● ☼ ☼ ☼ ● ●

Sea el problema de distribuir plantines desde tres viveros hasta cuatro sitios de plantación (rodales). Las cantidades de plantines requeridas en cada sitio de plantación se especifican de acuerdo con la superficie a plantar y la densidad estipulada. También se han especificado las disponibilidades de plantines en cada vivero. Finalmente, se especifican las distancias entre viveros y sitios de plantación.



El Modelo de Transporte

Vivero (i)	Distancias (km) del Vivero i al Rodal j — Rodal (j) 1	2	3	4	Disponibilidad (10^6 plantines)
1	8	19	22	6	5
2	15	6	16	5	1
3	7	8	9	12	2
Requerimiento (10^6 plantines)	2	3	2	1	8



El Modelo de Transporte

Si asumimos que los costos son directamente proporcionales a la distancia (*e.g.* todos los caminos son de calidad comparable), entonces el siguiente modelo minimiza los costos de distribuir los plantines:

Minimizar

$$z = 8x_{1,1} + 19x_{1,2} + 22x_{1,3} + 6x_{1,4} + 15x_{2,1} + 6x_{2,2}$$
$$+ 16x_{2,3} + 5x_{2,4} + 7x_{3,1} + 8x_{3,2} + 9x_{3,3} + 12x_{3,4}$$

Sujeto a

$$\begin{array}{llll}
x_{1,1}+x_{1,2}+x_{1,3}+x_{1,4}=5 & (V_1) & x_{1,1}+x_{2,1}+x_{3,1}=2 & (R_1) \\
x_{2,1}+x_{2,2}+x_{2,3}+x_{2,4}=1 & (V_2) & x_{1,2}+x_{2,2}+x_{3,2}=3 & (R_2) \\
x_{3,1}+x_{3,2}+x_{3,3}+x_{3,4}=2 & (V_3) & x_{1,3}+x_{2,3}+x_{3,3}=2 & (R_3) \\
x_{i,j} \geqslant 0 & & x_{1,4}+x_{2,4}+x_{3,4}=1 & (R_4)
\end{array}$$

Solución óptima

$$z^* = 84\,;\ x^*_{1,1} = 2\,;\ x^*_{1,2} = 2\,;\ x^*_{1,4} = 1,\ x^*_{2,2} = 1\,;\ x^*_{3,3} = 2$$

El Modelo de Transporte

Sea $\boldsymbol{x_{i,j}}$ la cantidad de plantines a transportar desde el vivero $\boldsymbol{i}$ al rodal $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{d_{i,j}}$ la distancia entre el vivero $\boldsymbol{i}$ y el rodal $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{V}$ el número de viveros, $\boldsymbol{R}$ el número de rodales, $\boldsymbol{D_i}$ la disponibilidad de plantines del vivero $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{Q_j}$ el requerimiento de plantines del rodal $\boldsymbol{j}$. Si se asume que los costos son directamente proporcionales a la distancia entre los viveros y los rodales, entonces la formulación general del modelo que minimiza los costos de distribuir los plantines se puede escribir así:

$$\text{Minimizar} \quad z = \sum_{i=1}^{V} \sum_{j=1}^{R} d_{i,j} x_{i,j}$$

$$\text{Sujeto a:} \quad \sum_{j=1}^{R} x_{i,j} = D_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, V)$$

$$\sum_{i=1}^{V} x_{i,j} = Q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, R)$$

$$x_{i,j} \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, V;\ j = 1, 2, \ldots, R)$$

El Modelo del Árbol de la Mínima Extensión

Dada una red, el propósito es **seleccionar los vínculos** (***ramas***) de forma tal que se transforme en un ***árbol*** que se extienda por todos los nodos y se minimice el criterio de decisión (normalmente distancias, tiempos o costos).

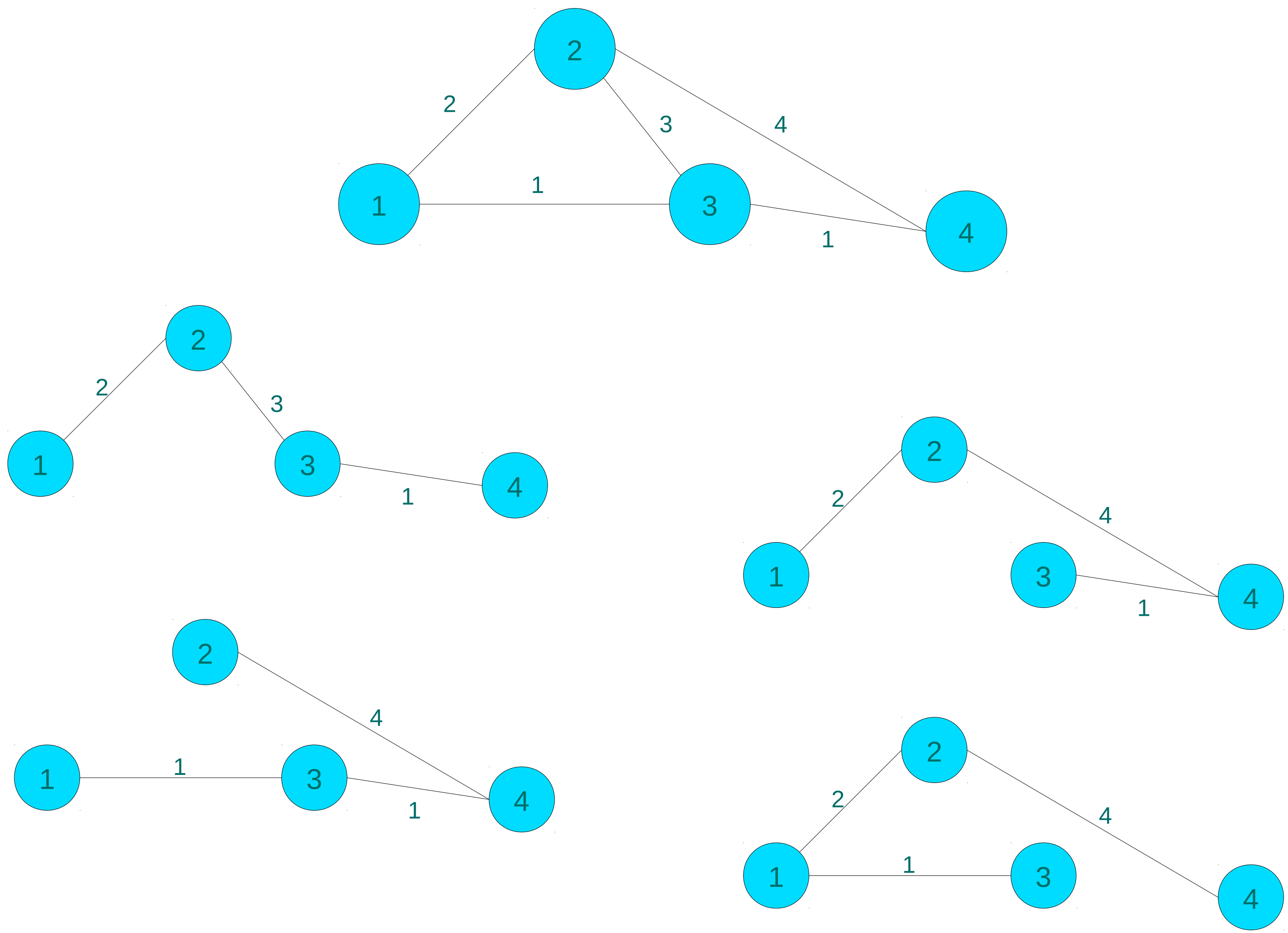
● ● ☼ ☼ ☼ ● ●

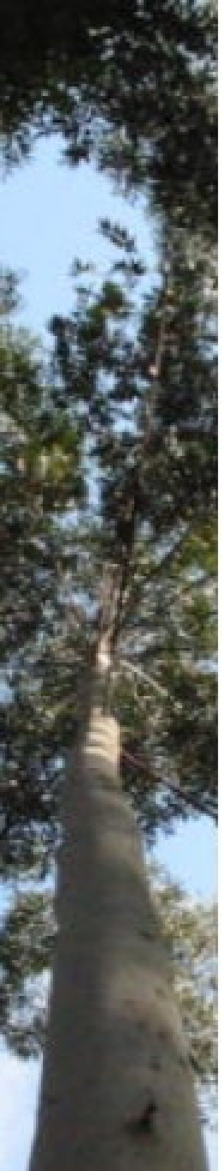
Si bien es posible, plantear el problema de programación lineal demanda enumerar todas los **caminos** posibles desde cada nodo hasta cada uno de los otros nodos (sea directamente o pasando por otros nodos intermedios).

● ● ☼ ☼ ☼ ● ●

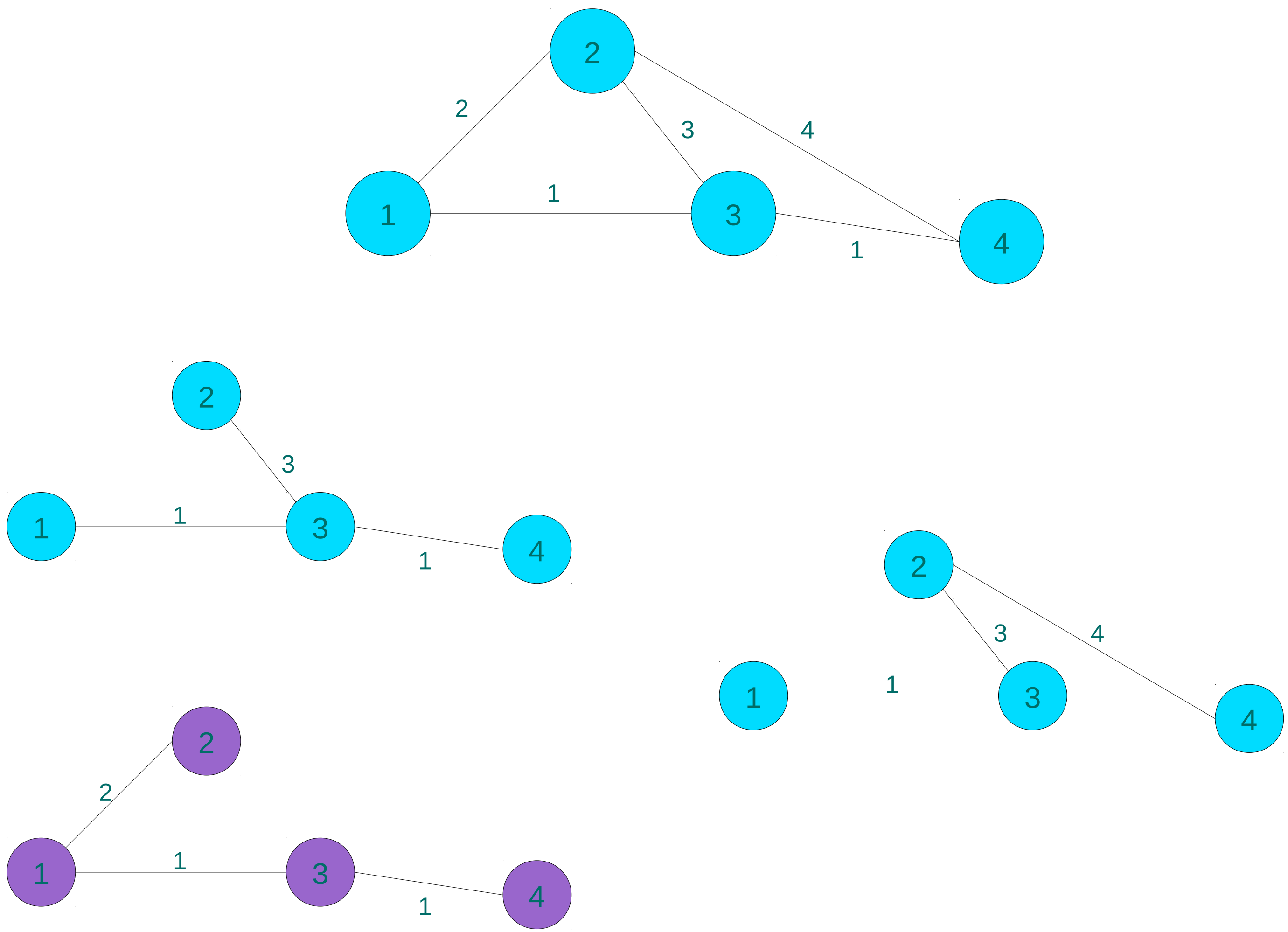
Por otra parte, el algoritmo específico es uno de los raros ejemplos en que la solución *miope* es la más eficiente, además de ser extremadamente sencillo. De este modo, usar el algoritmo específico es lo más recomendable para resolver este tipo de problemas.

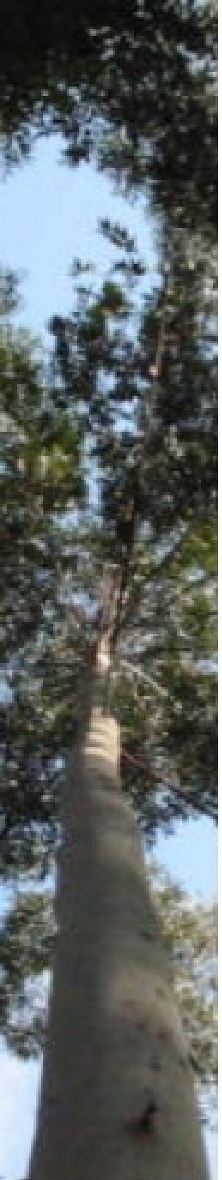
El Modelo del Árbol de la Mínima Extensión





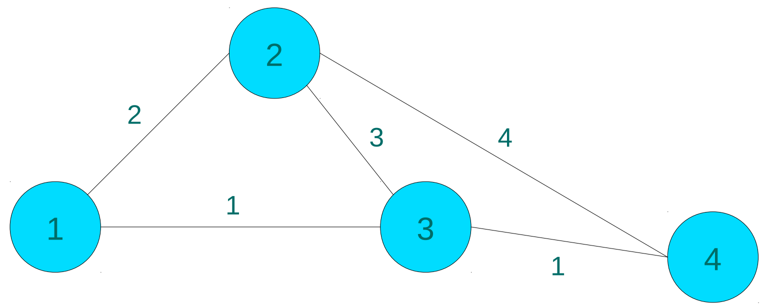
El Modelo del Árbol de la Mínima Extensión





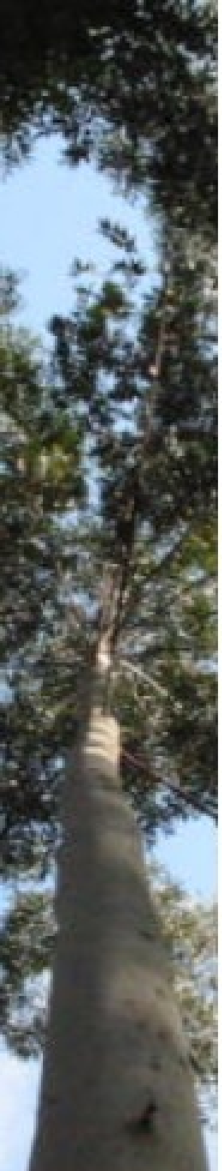
El Modelo del Árbol de la Mínima Extensión

Sea el problema de construir, al mínimo costo, los caminos que conecten a todos los rodales que se cosecharán en el mismo año, en la siguiente red, en la que se han indicado en los arcos los costos de construcción del camino que une a los correspondientes nodos:



El algoritmo específico se puede sintetizar de la siguiente manera:

1. Pararse en un nodo cualquiera de la red y conectar al nodo más próximo a él.
2. Identificar el nodo desconectado más próximo a uno ya conectado y conectarlo.
3. Repetir el paso anterior hasta que todos los nodos queden conectados.



El Modelo de la Ruta Más Corta

Dada una red dirigida, el propósito es encontrar el camino más corto (en el sentido dado por el criterio de decisión adoptado) desde un nodo **origen** (cualquiera) hasta un nodo **destino** (cualquiera) atravesando la red.

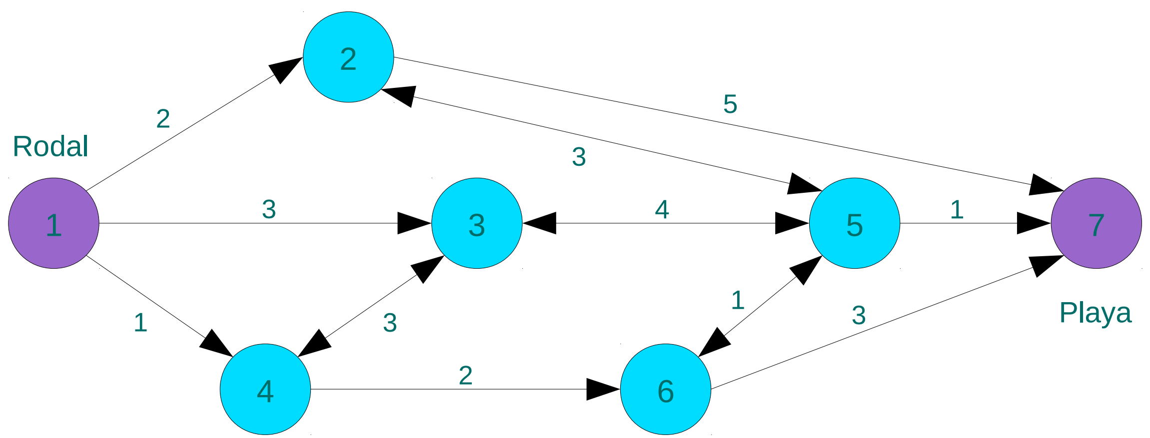
● ● ☼ ☼ ☼ ● ●

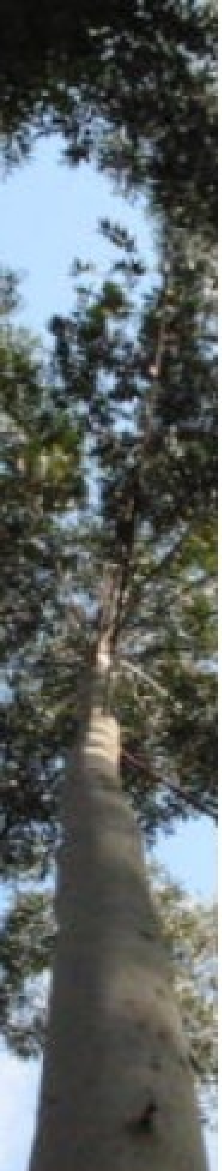
Se minimiza el criterio de decisión, normalmente distancias, tiempos o costos, los cuales se explicitan como coeficientes de la función objetivo. Las variables de decisión se denotan con $\boldsymbol{x_{i,j}}$ y se definen como variables indicadoras de la pertenencia a la ruta más corta del arco cuyo nodo de origen es ***i*** y su nodo de destino es ***j***; en otras palabras son **variables binarias**:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco pertenece a la ruta más corta} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

El Modelo de la Ruta Más Corta

Sea el problema de encontrar el camino más corto entre un rodal aprovechado y la playa de trozas, a través de la siguiente red dirigida en la que se han indicado las distancias en los arcos:





El Modelo de la Ruta Más Corta

Minimizar

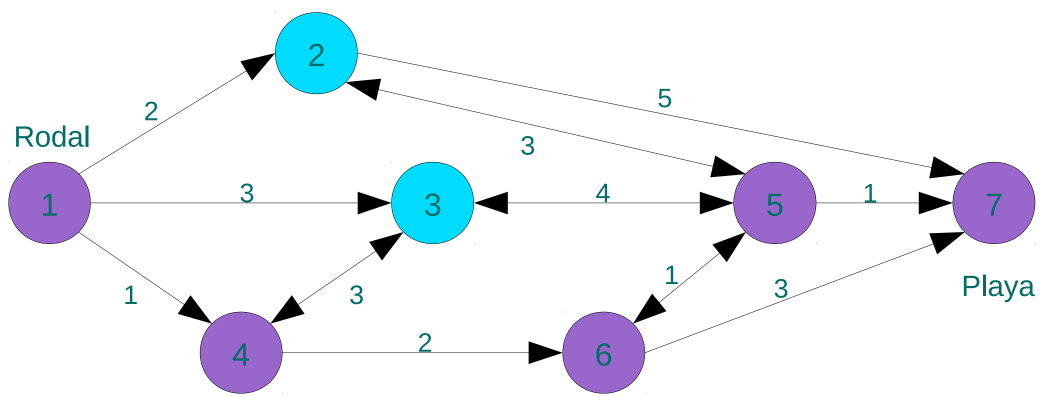
$$z=2x_{1,2}+3x_{1,3}+1x_{1,4}+3x_{4,3}+3x_{3,4}+2x_{4,6}+4x_{3,5}$$
$$+1x_{5,6}+1x_{6,5}+3x_{2,5}+3x_{5,2}+3x_{6,7}+1x_{5,7}+5x_{2,7}$$

Sujeto a

$$x_{1,2}+x_{1,3}+x_{1,4}=1 \quad (N_1)$$
$$x_{1,2}+x_{5,2}=x_{2,5}+x_{2,7} \quad (N_2)$$
$$x_{1,3}+x_{4,3}=x_{3,4}+x_{3,5} \quad (N_3)$$
$$x_{1,4}+x_{3,4}=x_{4,3}+x_{4,6} \quad (N_4)$$
$$x_{6,5}+x_{3,5}+x_{2,5}=x_{5,6}+x_{5,2}+x_{5,3}+x_{5,7} \quad (N_5)$$
$$x_{4,6}+x_{5,6}=x_{6,5}+x_{6,7} \quad (N_6)$$
$$x_{2,7}+x_{5,7}+x_{6,7}=1 \quad (N_7)$$
$$x_{i,j}=(0,1)$$

Solución óptima

$$z^*=5;\ x^*_{1,4}=1;\ x^*_{4,6}=1;\ x^*_{6,5}=1,\ x^*_{5,7}=1$$



El Modelo del Máximo Flujo

Dada una red dirigida, el propósito es maximizar el flujo de circulación desde un nodo **fuente** (cualquiera) hasta un nodo **sumidero** (cualquiera) a través de toda la red.

● ● ☼ ☼ ☼ ● ●

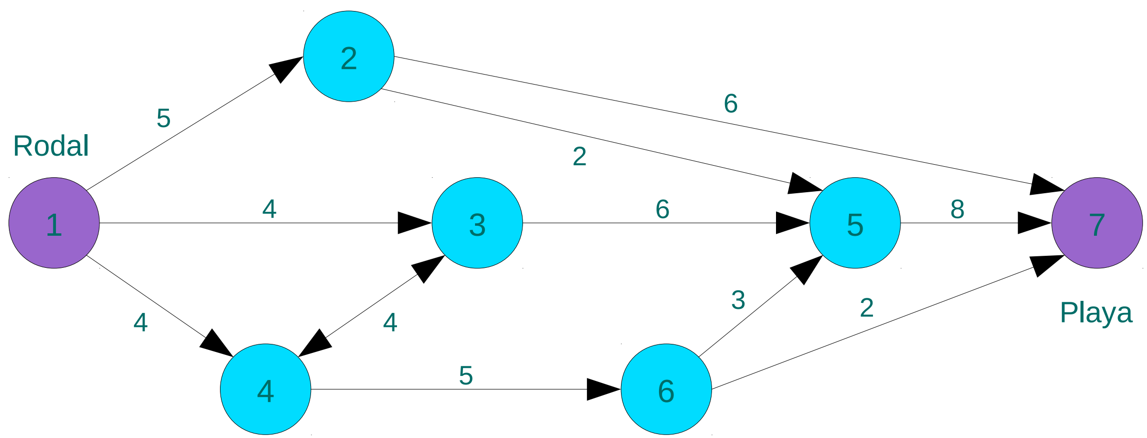
Cada arco es un *canal* a través del cual se puede transportar un flujo y cada *canal* está limitado por una capacidad de carga. En cualquier nodo de la red se asume que lo que fluye hacia él debe igualarse con lo que fluye desde él (conservación de los flujos). Para el nodo **fuente** se asume que lo que fluye hacia él desde afuera de la red debe ser igual a lo que fluye desde el nodo **sumidero** hacia fuera de la red, maximizándose cualquiera de las dos cantidades en la función objetivo.

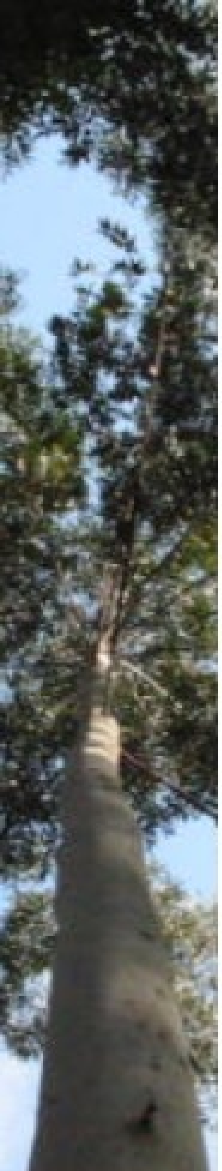
● ● ☼ ☼ ☼ ● ●

Las variables de decisión se denotan con $\boldsymbol{x_{i,j}}$ y representan la cantidad de bienes que pueden circular por el arco cuyo nodo de origen es $\boldsymbol{i}$ y su nodo de destino es $\boldsymbol{j}$.

El Modelo del Máximo Flujo

Sea el problema de asignar el número de camiones diarios que circularán por cada arco, a través de la siguiente red en la que se han señalado las capacidades de carga, de forma tal que se maximice la cantidad de camiones que circulan por toda la red:





El Modelo del Máximo Flujo

Maximizar

$$z = x_{\text{entrada}}$$

Sujeto a

$$x_{\text{entrada}} = x_{\text{salida}} \quad (B_G)$$

$$x_{\text{entrada}} = x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} \quad (N_1)$$

$$x_{1,2} = x_{2,5} + x_{2,7} \quad (N_2)$$

$$x_{1,3} + x_{4,3} = x_{3,4} + x_{3,5} \quad (N_3)$$

$$x_{1,4} + x_{3,4} = x_{4,3} + x_{4,6} \quad (N_4)$$

$$x_{6,5} + x_{3,5} + x_{2,5} = x_{5,7} \quad (N_5)$$

$$x_{4,6} + x_{5,6} + x_{4,6} = x_{6,5} + x_{6,7} \quad (N_6)$$

$$x_{6,7} + x_{5,7} + x_{2,7} = x_{\text{salida}} \quad (N_7)$$

$$x_{3,4} + x_{4,3} \leqslant 4 \quad (A_4)$$

$$x_{i,j} \geqslant 0$$

Cotas

$$x_{1,2} \leqslant 5 ;\ x_{1,3} \leqslant 4 ;\ x_{1,4} \leqslant 4 ;\ x_{4,6} \leqslant 5 ;\ x_{3,5} \leqslant 6$$

$$x_{6,5} \leqslant 3 ;\ x_{2,5} \leqslant 2 ;\ x_{6,7} \leqslant 2 ;\ x_{5,7} \leqslant 8 ;\ x_{2,7} \leqslant 6$$

Solución óptima

$$x^*_{\text{entrada}} = x^*_{\text{salida}} = 13$$

$$x^*_{1,2} = 5 ;\ x^*_{1,3} = 4 ;\ x^*_{1,4} = 4 ;\ x^*_{4,6} = 4 ;\ x^*_{3,5} = 4$$

$$x^*_{6,5} = 2 ;\ x^*_{2,5} = 2 ;\ x^*_{6,7} = 2 ;\ x^*_{5,7} = 8 ;\ x^*_{2,7} = 3$$

El Método del Camino Crítico (CPM-PERT)

- Normalmente se lo usa para la planificación y control de **proyectos**, los que se descomponen en **actividades** caracterizadas por una **duración** y sus relaciones de **precedencia**.

- El objetivo es **minimizar la duración total del proyecto** identificando las **actividades críticas**, *i.e.* las que deben completarse en el tiempo previsto para completar el proyecto en el tiempo mínimo (en otras palabras, aquellas actividades cuyo retraso alargarían la duración total del proyecto).

- El modelo puede caracterizarse como el método para encontrar el **camino más largo** a través de una **red acíclica** minimizando la medida de eficiencia (el tiempo).

- El Método del Camino Crítico (CPM) y la Técnica de Evaluación y Revisión de Programas (PERT) tienen más semejanzas que diferencias. CPM es un modelo determinista mientras que PERT considera a la duración de las actividades como variables aleatorias.

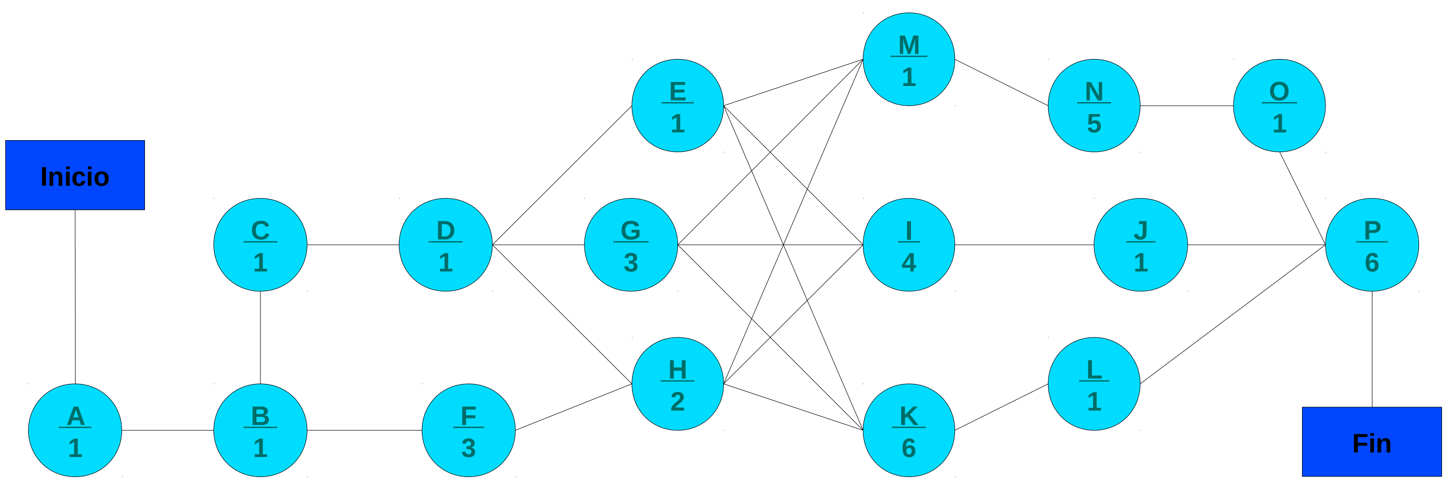
El Método del Camino Crítico (CPM-PERT)

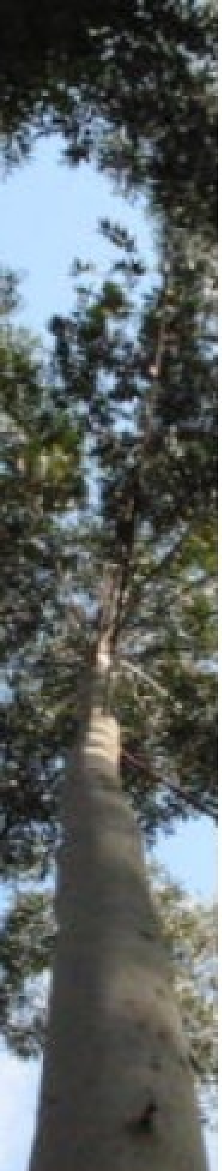
- Tabla de actividades para comprar una propiedad para el establecimiento de plantaciones. La duración está expresada en días.

	Actividad	Precedencia	Duración
A	Identificar al propietario en el catastro	-	1
B	Conseguir autorización del propietario para el relevamiento	A	1
C	Planificar el reconocimiento	B	1
D	Realizar el reconocimiento del sitio	C	1
E	Redactar un informe del reconocimiento	D	1
F	Planificar el levantamiento de los límites	B	3
G	Diseñar el muestreo de la vegetación y organizar las brigadas de campo	D	3
H	Realizar el levantamiento de los límites	D y F	2
I	Realizar el muestreo de la vegetación	E, G y H	4
J	Realizar el plano de la vegetación	I	1
K	Realizar el levantamiento altimétrico	E, G y H	6
L	Realizar el plano de curvas de nivel	K	1
M	Diseñar el muestreo de suelos	E, G y H	1
N	Realizar el muestreo de suelos	M	5
O	Analizar las muestras de suelos y realizar el plano de suelos	N	1
P	Redactar el informe final	J, L y O	6

El Método del Camino Crítico (CPM-PERT)

- Los nodos representan actividades (identificadas con una letra mayúscula) con su duración (el número debajo de la letra mayúscula). Los vínculos establecen la precedencia entre las actividades.





El Método del Camino Crítico (CPM-PERT)

- Una posible formulación del problema del camino crítico como un problema de Programación Lineal:

Sean $\mathcal{J}:$ un conjunto de tareas o actividades

$P(j):$ el subconjunto de las tareas precedentes de j $(\forall\, j \in \mathcal{J})$

$\Omega:$ la última tarea $(\Omega \in \mathcal{J})$

$t_j:$ la duración de la tarea j $(\forall\, j \in \mathcal{J})$

Se definen $x_j:$ la fecha de inicio de la tarea j $(\forall\, j \in \mathcal{J})$

$z:$ la duración total del proyecto

Minimizar z

Sujeto a:

$$x_j \geqslant x_k + t_k \quad \forall\, j \in \mathcal{J},\ \forall\, k \in P(j)$$

$$z \geqslant x_\Omega + t_\Omega$$

$$x_j \geqslant 0$$