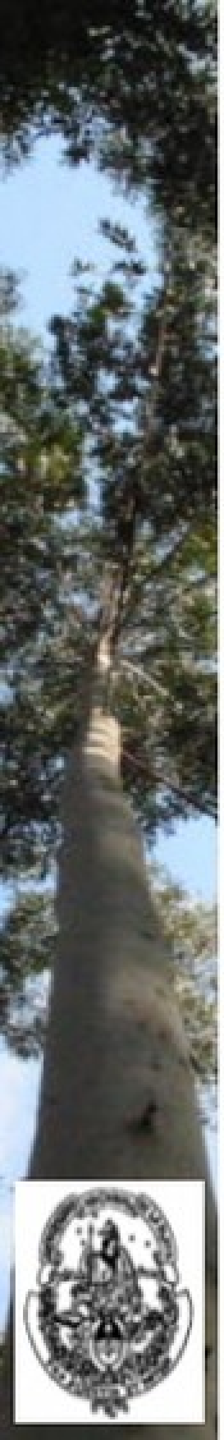


Introducción a la Investigación de Operaciones

Unidad didáctica 2: Programación lineal

- **Alcance:** en esta unidad didáctica se introducirá el uso de modelos matemáticos como mecanismo de representación y solución para varios tipos de problemas de decisión. Por la importancia central que se le asigna en la asignatura, el problema de la programación lineal será abordado con detenimiento.
- **Contenidos:** el problema de la programación lineal. Variables de decisión, función objetivo, restricciones y soluciones. Formalización matemática. Axiomas. Solución gráfica, analítica y algorítmica. Formulación y resolución del problema en planillas de cálculo. El método símplex, su interpretación económica y el análisis de sensibilidad. Formulación y resolución del problema con el lenguaje de modelado algebraico MathProg y GLPK. Problemas prototípicos de programación lineal (e.g. mezcla de productos, de la dieta, planificación de horarios, producción e inventario, cadena de abastecimiento, cartera de inversión, análisis de la envolvente de datos).

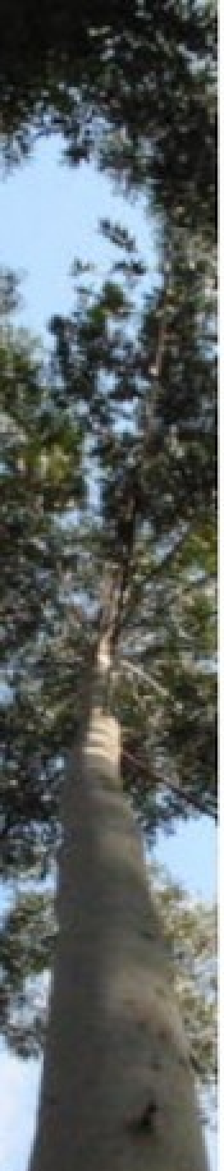
Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

Universidad Nacional de La Plata

La Plata – Mayo del 2020 – Pablo Yapura

Análisis de sensibilidad (robustez, estabilidad)

- **Determinismo** (o supuesto de **certidumbre**): el modelo de la programación lineal es determinista. Esto implica que en el cálculo de una solución no se considera que los valores adoptados para los coeficientes y parámetros pueden ser meras aproximaciones.
- Estudio sobre el desempeño de un sistema que busca determinar y cuantificar las fuentes de su incertidumbre entre sus entradas (insumos). En nuestro caso, el desempeño del sistema está representado por el modelo matemático de decisión y las constantes del modelo son las entradas (datos).
- Usualmente se realiza cambiando los valores de las constantes del modelo, de a una por vez y manteniendo a las demás en niveles constantes (*i.e. ceteris paribus*), para registrar los cambios en el desempeño, o sea en las soluciones. **Análisis posóptimo**.
- Así se identifica cuáles son **sensibles**, es decir aquellos que no pueden cambiar sin que cambie la solución óptima.



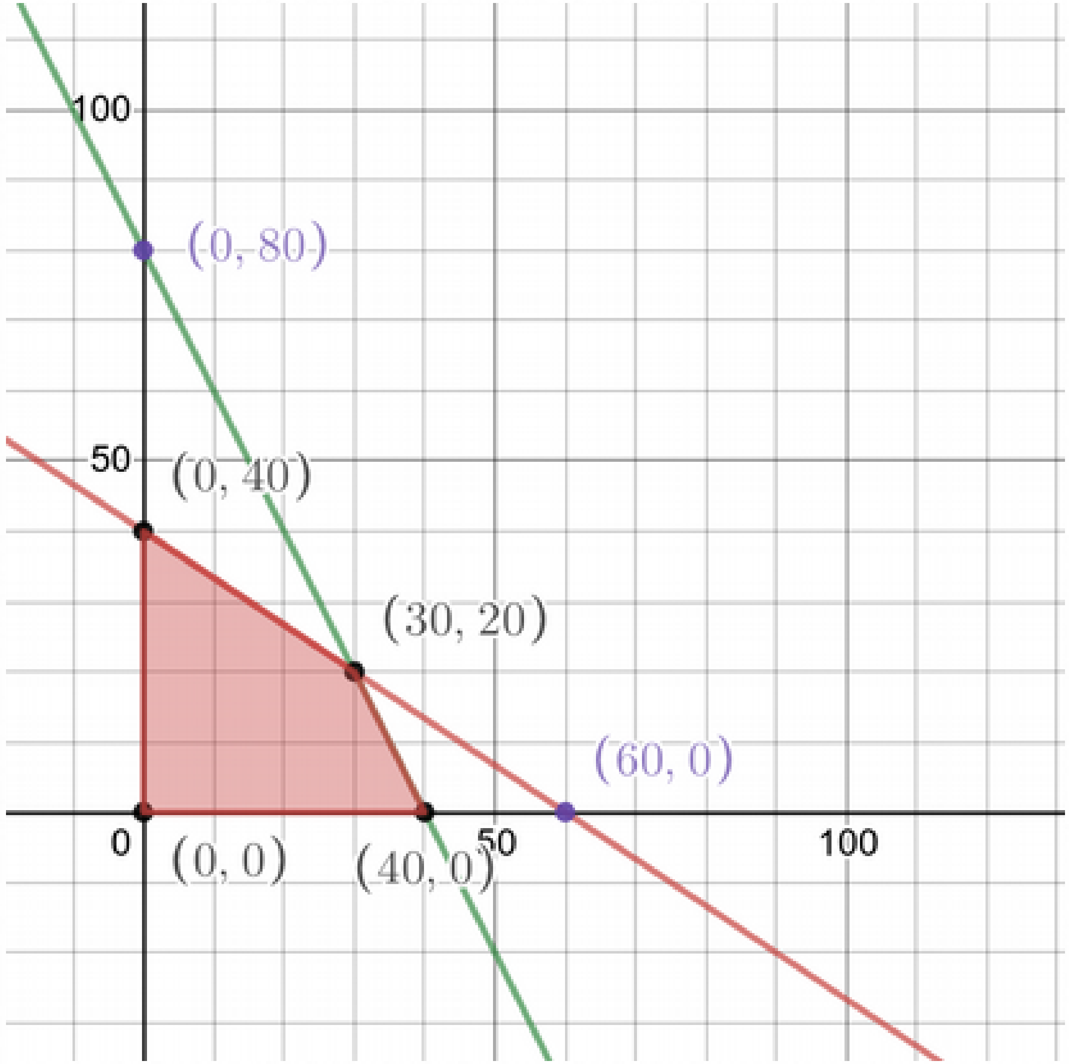
El modelo matemático

- Si el predador debe maximizar el valor calórico de su dieta en el limitado tiempo disponible, entonces su problema es un problema de programación lineal que se puede expresar de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Maximizar} & 6x_1 + 8x_2 & = & z & (\text{valor calórico}) \\
\text{Sujeto a} & 2x_1 + 3x_2 & \leqslant & 120 & (\text{tiempo de traslado}) \\
 & 2x_1 + x_2 & \leqslant & 80 & (\text{tiempo de captura}) \\
 & x_1, x_2 & \geqslant & 0 &
\end{array}
$$

- Dónde z simboliza el valor calórico y x_1 y x_2 representan el número de presas de los sitios 1 y 2, respectivamente, con los que se compone la dieta del predador.

La interpretación geométrica



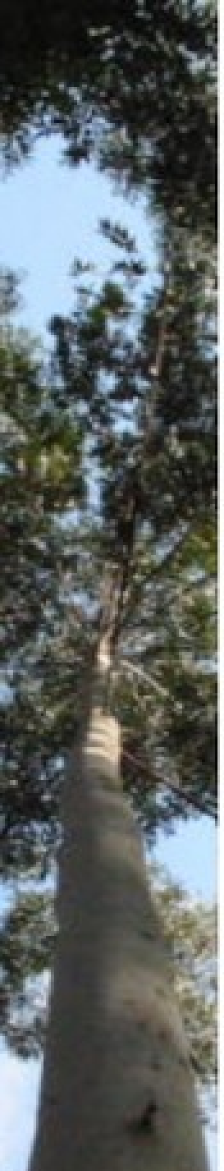
Provistos por el Símplex

- Coeficientes de la función objetivo
  - Análisis de rango $c_1 = \left[5\frac{1}{3}, 16\right]; \quad c_2 = [3, 9]$
  - Costo reducido

- Coeficientes a la derecha de las desigualdades
  - Análisis de rango $b_1 = [80{,}240]; \quad b_2 = [40{,}120]$
  - Precio sombra

$$\frac{\Delta z}{\Delta b_1} = \frac{365 - 340}{130 - 120} = \frac{315 - 340}{110 - 120} = 2{,}5 \text{ calorías/minuto}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta b_2} = \frac{350 - 340}{100 - 80} = \frac{330 - 340}{60 - 80} = 0{,}5 \text{ calorías/minuto}$$

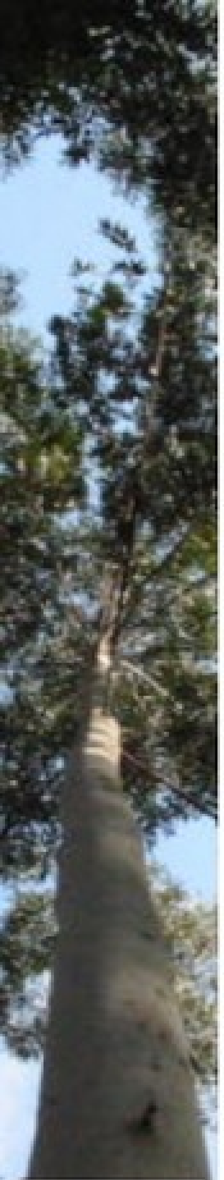


Re-interpretando el problema predador-presa

- El problema nos informa sobre niveles de producción óptimos, sujeto a las limitaciones en los recursos especificadas en las restricciones, en este caso los tiempos de traslado y de captura:

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Maximizar} & 6x_1+8x_2 & = & z & (\text{valor calórico}) \\
\text{Sujeto a} & 2x_1+3x_2 & \leqslant & 120 & (\text{tiempo de traslado}) \\
 & 2x_1+\ \ x_2 & \leqslant & 80 & (\text{tiempo de captura}) \\
 & x_1,\ x_2 & \geqslant & 0 &
\end{array}
$$

- Por una variedad de razones sería deseable estimar el valor de cada uno de estos recursos.
- El valor (costo) de cada recurso limitante está relacionado con los retornos que sea capaz de producir, en este ejemplo para producir calorías.
- Económicamente: el valor marginal del producto de un recurso (valor adicional producido por la última unidad de recurso usado), es el precio que la firma estaría dispuesta a pagar por cantidades adicionales del recurso escaso.

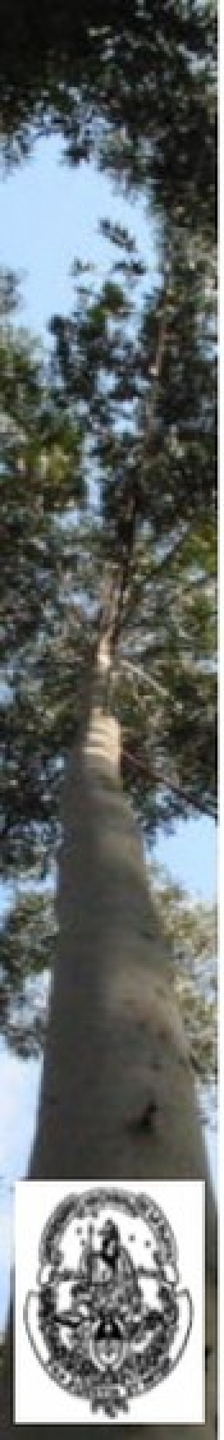


La formulación del problema dual

El problema de encontrar estos precios resulta ser un PPL que se denomina problema dual, dado un problema primal que es un PPL. Para formular el problema dual se empezará definiendo los precios sombra o variables duales:

- Sean $\boldsymbol{y_1}$ el valor del producto que se puede producir con una unidad de tiempo de traslado (en calorías.minuto^{-1}) e $\boldsymbol{y_2}$ el valor del producto que se puede producir con una unidad de tiempo de captura (en calorías.minuto^{-1}).
- El objetivo del problema dual es encontrar los precios sombras que minimicen el costo total de adquirir los tiempos de traslado y captura, es decir los recursos disponibles.
- Si se simboliza a este costo total con ***v*** y se considera que el costo de adquirir cada uno de los recursos es igual al producto de la cantidad disponible por su correspondiente precio, se puede escribir como función objetivo:

$$\text{Minimizar } v = 120\, y_1 + 80\, y_2$$



Completando la formulación del dual

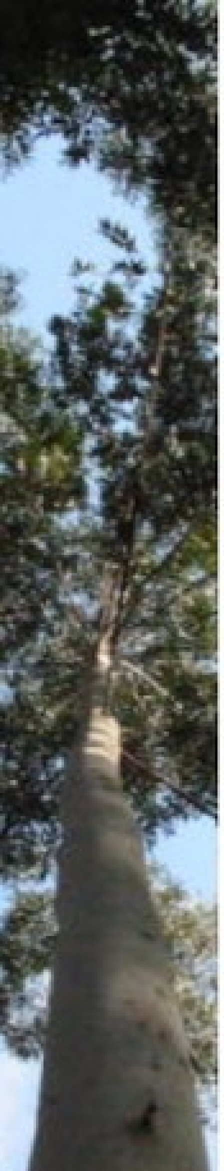
- Si el predador quisiera “vender” la capacidad de sus recursos debería pedir precios para cada uno de ellos que al menos le retornen lo mismo que las dos actividades que los usan, o sea alimentarse con presas en los sitios 1 y 2.
- Por cada una de las presas con las que se alimenta en el sitio 1 obtiene una contribución de 6 calorías, necesita 2 minutos para trasladarse y 2 minutos para capturarla. En consecuencia, la producción de una contribución mínima de 6 calorías.presa^{-1} cuando se implementa esta actividad puede ser escrita como una restricción:

$$2y_1 + 2y_2 \geqslant 6$$

- Con un razonamiento semejante, la actividad de traslado y captura de presas en el sitio 2 puede ser descripta con la restricción:

$$3y_1 + 1y_2 \geqslant 8$$

- Que se completa con la no-negatividad de las variables.



Formulaciones simétricas

Problema primal: asignación de recursos	Problema dual: valoración de recursos
$6x_1 + 8x_2 = z\ (\max)$	$120y_1 + 80y_2 = v\ (\min)$
$2x_1 + 3x_2 \leq 120$	$2y_1 + 2y_2 \geq 6$
$2x_1 + x_2 \leq 80$	$3y_1 + y_2 \geq 8$
$x_1, x_2 \geq 0$	$y_1, y_2 \geq 0$

$$\underset{[x_j]}{\text{Maximizar}}\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \underset{[y_i]}{\text{Minimizar}}\ v = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

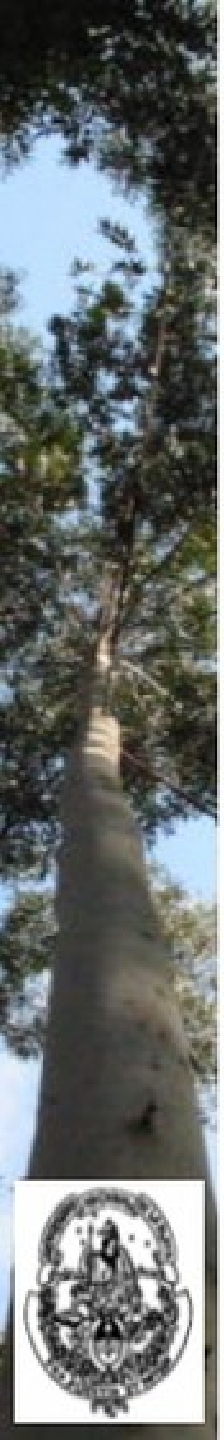
$$\text{sujeto a}: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \,(i=1,\ 2,\ \ldots,m) \qquad \text{sujeto a}: \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j \,(j=1,\ 2,\ \ldots,n)$$

$$x_j \geqslant 0\,(j=1,\ 2,\ \ldots,n) \qquad y_i \geqslant 0\,(i=1,\ 2,\ \ldots,m)$$

Definiciones

- *Precio sombra*, *precio marginal*, *precio dual, precio*: al nivel o valor óptimo de la variable del problema dual asociada a una restricción del problema primal se le llama precio sombra.

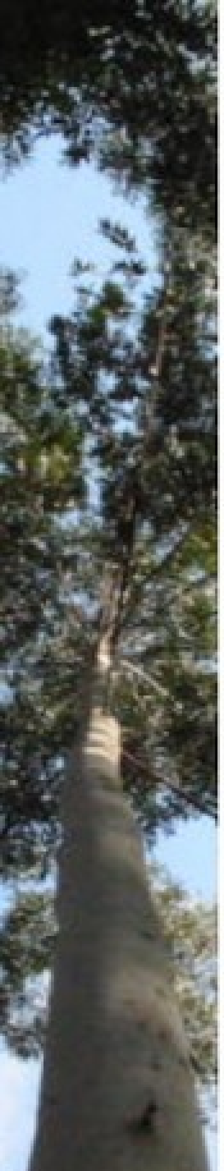
- *Costos reducidos* o *factores de costo relativos*: los coeficientes en la función objetivo de un sistema expresado en forma canónica son llamados factores de costo relativos (relativos puesto que sus valores dependen de la selección del conjunto de variables básicas). Estos factores de costo relativo también son llamados costos reducidos asociados con un conjunto de variables básicas.



Interpretaciones

- El precio sombra de una restricción es la tasa de cambio en el valor de la función objetivo como consecuencia del cambio en el valor del lado derecho de la restricción. La calificación de sombra pretende enfatizar que no se trata de valores tomados del mercado sino que son *imputados* o *asignados*.

- El costo reducido es el precio sombra de la restricción de no negatividad de la correspondiente variable. Vale también para las restricciones de acotamiento.
- Es lo que tiene que mejorar un coeficiente de la función objetivo de una variable no básica (*i.e.* nula en la solución óptima) para que pueda entrar en la base (*i.e.* tomar un valor estrictamente positivo e igual a uno).
- Es lo que cambia (empeora) el valor de la función objetivo si se fuerza a que la solución óptima incluya una unidad de una actividad que no es óptima (costo de oportunidad).

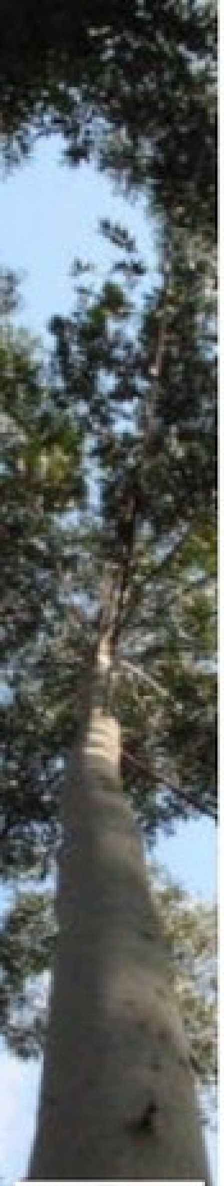


El Símplex hace los cálculos *per se*

- Como lo informa el *solver* de GLPK
- Como lo informa el *solver* de Excel
- Como se lo puede ver en una **tabla símplex**:

Iteración 2 (Final)

Variable básica	Ecuación (i)	Variables (j)					Parámetro
		z	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
z	*0*	1	0	0	5/2	1/2	340
x_2	*1*	0	0	1	1/2	- 1/2	20
x_1	*2*	0	1	0	- 1/4	3/4	30



Formulaciones no estandarizadas

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z = \; & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a: } \; & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 120 \\ & 6x_1 + 8x_2 \geqslant 240 \\ & 3x_1 + 2x_2 = 90 \\ & x_1 \geqslant 0,\; x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

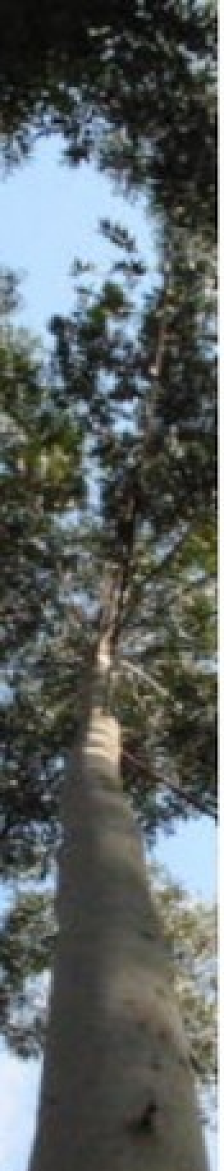
$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 90$$
$$(3x_1 + 2x_2 \geqslant 90)(-1)$$

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } -z = \; & -2x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a: } \; & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 120 \\ & -6x_1 - 8x_2 \leqslant -240 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leqslant 90 \\ & -3x_1 - 2x_2 \leqslant -90 \\ & x_1 \geqslant 0,\; x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } v = \; & 120y_1 + 240y_2 + 90y_3 \\ \text{sujeto a: } \; & 2y_1 + 6y_2 + 3y_3 \geqslant -2 \\ & 3y_1 + 8y_2 + 2y_3 \geqslant -1 \\ & y_1 \geqslant 0,\; y_2 \leqslant 0,\; y_3 \text{ irrestricta} \end{aligned}$$

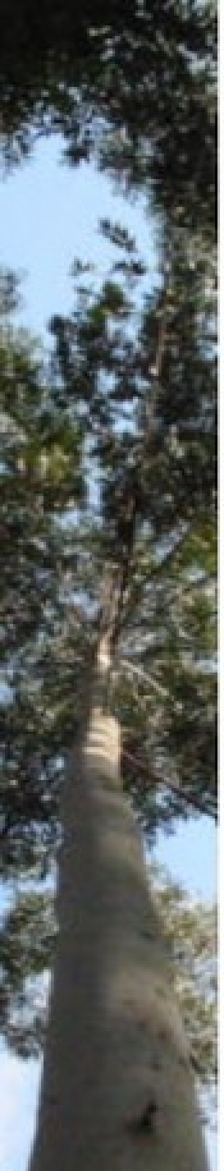
$$\begin{aligned} \text{Minimizar } v = \; & 120y_1 - 240y'_2 + 90y'_3 - 90y''_3 \\ \text{sujeto a: } \; & 2y_1 - 6y'_2 + 3y'_3 - 3y''_3 \geqslant -2 \\ & 3y_1 - 8y'_2 + 2y'_3 - 2y''_3 \geqslant -1 \\ & y_1 \geqslant 0,\; y'_2 \geqslant 0,\; y'_3 \geqslant 0,\; y''_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$y'_3 - y''_3 = y_3$$
$$0 - y''_2 = y_2$$
$$y''_2 ; y'_3 ; y''_3 \geqslant 0$$
$$y_2 \leqslant 0$$



Una forma más simple

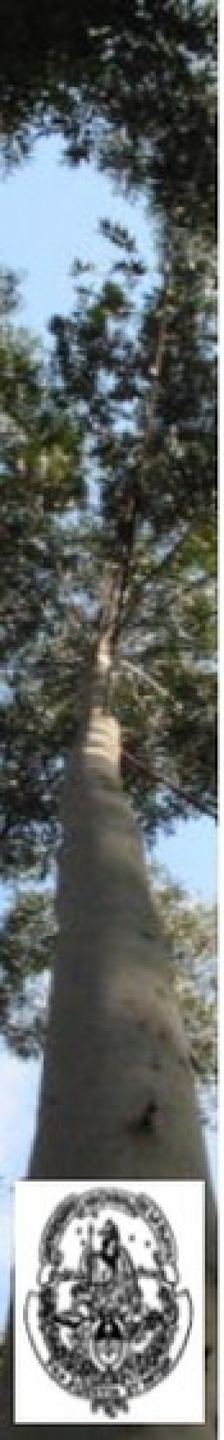
Problema primal	Problema dual
Maximizar objetivo primal	Minimizar objetivo dual
Coeficientes de la función objetivo primal	Parámetros del problema dual
Parámetros del problema primal	Coeficientes de la función objetivo dual
Matriz de coeficientes de las restricciones	Matriz traspuesta de los coeficientes
Relación primal	Variable dual
i-ésima inecuación: $\leq$	$y_i \geq 0$
i-ésima inecuación: $\geq$	$y_i \leq 0$
i-ésima ecuación: $=$	y_i irrestricta
Variable primal	Relación dual
$x_j \geq 0$	j-ésima inecuación: $\geq$
$x_j \leq 0$	j-ésima inecuación: $\leq$
x_j irrestricta	j-ésima ecuación: $=$



La forma más simple aplicada

		Primal			
	Variable	$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	Relación	Constante
	$y_1 \leq 0$	2	3	$\leq$	120
	$y_2 \geq 0$	6	8	$\geq$	240
Dual	y_3 irrestricta	3	2	$=$	90
	Relación	$\leq$	$\leq$		Max v
	Constante	2	1	Min z	

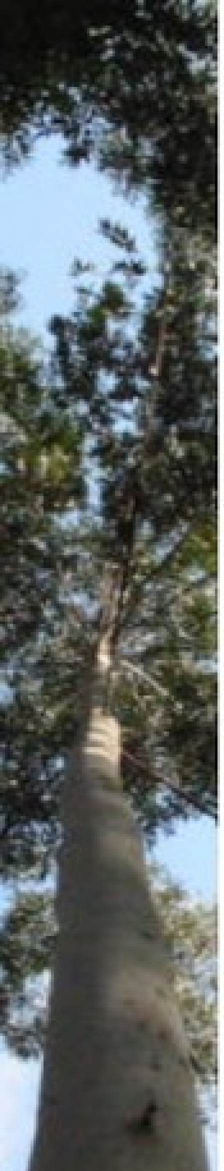
Primal no estándar (Ecuación (8))	Dual no estándar (Ecuación (12))
$\min z = 2x_1 + x_2$	$\max v = 120y_1 + 240y_2 + 90y_3$
// $2x_1 + 3x_2 \leq 120$	// $2y_1 + 6y_2 + 3y_3 \leq 2$
$6x_1 + 8x_2 \geq 240$	$3y_1 + 8y_2 + 2y_3 \leq 1$
$3x_1 + 2x_2 = 90$	$y_1 \leq 0, y_2 \geq 0$
$x_1, x_2 \geq 0$	



Las combinaciones posibles

No todos los pares de problemas tienen solución factible, de modo que las cuatro combinaciones son posibles:

- Tanto el primal como el dual son problemas factibles.
  - Entonces Max $\boldsymbol{z}$ = Min $\boldsymbol{v}$
- El primal es factible y el dual no es factible.
  - Entonces Max $\boldsymbol{z} \rightarrow \infty$
- El primal no es factible y el dual es factible.
  - Entonces Min $\boldsymbol{v} \rightarrow -\infty$
- Tanto el primal como el dual son problemas no factibles.



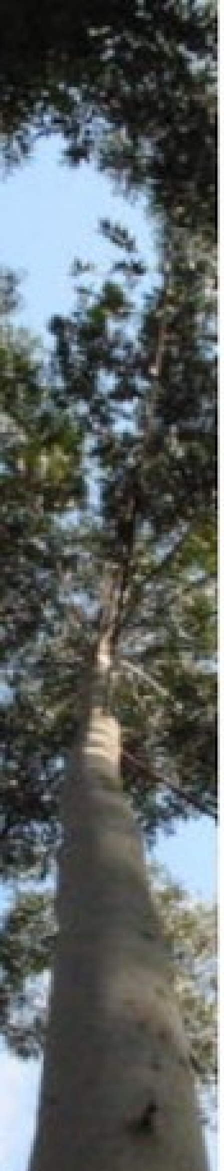
Teoremas de la dualidad (I)

- **Teorema de la dualidad débil**: sea cualquier solución factible del problema primal y cualquier solución factible de su problema dual, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{\circ} = z^{\circ} \leqslant v^{\circ} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^{\circ}$$

- *Corolario*: cualquier solución factible del problema dual provee una cota superior para los valores de la función objetivo del primal que se pueden obtener con soluciones factibles. Simétricamente, cualquier solución factible del primal provee una cota inferior para los valores de la función objetivo del dual que se pueden obtener con soluciones factibles.

- *Soluciones complementarias* (propiedad): en cada iteración, el Símplex identifica de manera simultánea una solución factible básica para el problema primal y una solución complementaria para el problema dual que tiene el mismo valor de la función objetivo pero tal que, si la solución del primal no es óptima, entonces la del dual no es factible.

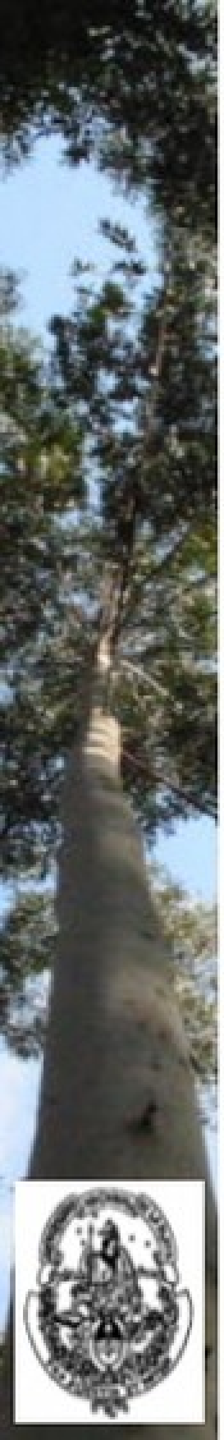


Teoremas de la dualidad (II)

- **Teorema de la dualidad estricta**: si el problema primal tiene solución factible y su problema dual tiene solución factible, entonces existen soluciones factibles óptimas para el primal y el dual , tales que

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = z^* = v^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

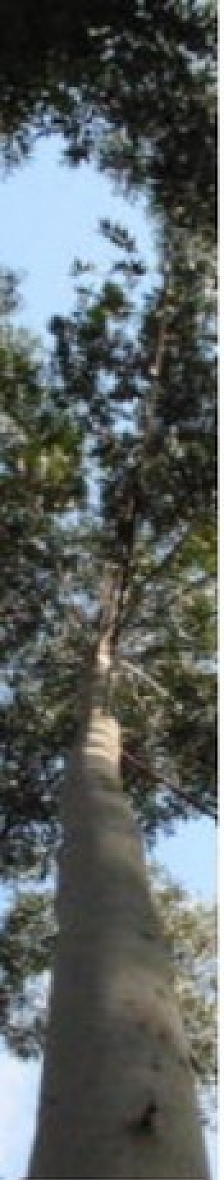
- **Teorema de la holgura complementaria**: para soluciones factibles óptimas del problema primal y su dual, toda vez que una relación de cualquiera de ellos tiene holgura, su variable dual asociada es nula; si una variable de cualquier sistema es positiva, la relación asociada en su dual está estrictamente satisfecha.



Otra vez, el Símplex hace los cálculos *per se*

- Como lo informa el *solver* de GLPK
- Como lo informa el *solver* de Excel
- Como se lo puede ver en una **tabla símplex**:

		Variable (j)								
VB	i	$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	α_1	α_2	b_i
$-z$	TSI-II$_0$	1	0	0	0	- 1/12	5/6	1/12	- 5/6	- 55
s_1	TSI-II$_1$	0	0	0	1	5/12	- 1/6	- 5/12	1/6	35
x_2	TSI-II$_2$	0	0	1	0	-1/4	1/2	1/4	- 1/2	15
x_1	TSI-II$_3$	0	1	0	0	1/6	- 2/3	- 1/6	2/3	20
$-z$	TS1-II$_0$	1	0	0	1/5	0	4/5	0	- 4/5	- 48
s_2	TS1-II$_1$	0	0	0	12/5	1	- 2/5	- 1	2/5	84
x_2	TS1-II$_2$	0	0	1	3/5	0	2/5	0	- 2/5	36
x_1	TS1-II$_3$	0	1	0	- 2/5	0	- 3/5	0	3/5	6

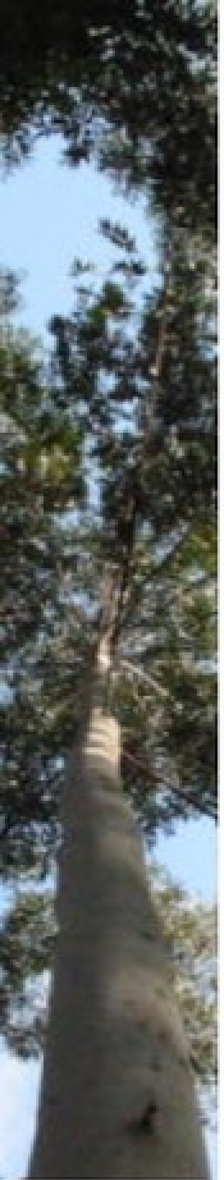


Aplicaciones

- Fundamento teórico de la interpretación económica y el análisis de sensibilidad del Método Símplex.

- Fundamento teórico para el Método o Algoritmo Símplex-dual (Lemke, 1954). La optimización empieza **superóptima** y no factible buscando la factibilidad; cuando lo encuentra, la solución también es **óptima**. En tanto, el Símplex empieza **subóptimo** y factible, buscando la optimalidad y manteniendo la factibilidad.

- Resolver más fácilmente problemas de PL con más restricciones que variables de decisión. Las propiedades de las soluciones complementarias permiten implantar soluciones en las proximidades del óptimo y facilita la reoptimización.



Bibliografía básica

- Hillier FS & GJ Lieberman. 2010. Introducción a la investigación de operaciones. 9° Edición. McGraw-Hill, México. Capítulo 6: 179-255.

- Dantzig GB & MN Thapa. 1997. Linear programming 1: Introduction. Springer-Verlag, New York. Chapter 5: 129-143.