Matemática I Teorico-Practico 9
Combinatoria

1. Combinatoria

1.1. Introducción

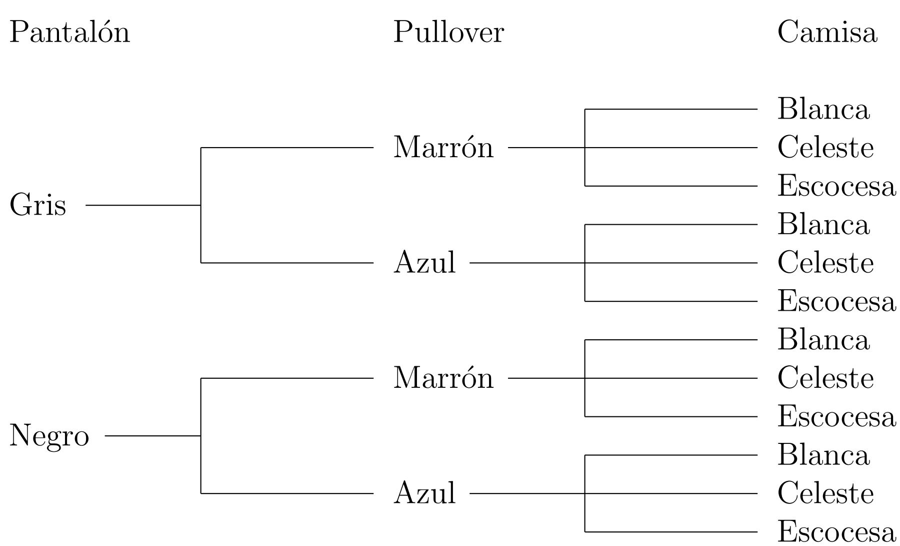
Muchos problemas tienen que ver con el número de maneras en que un conjunto de objetos se puede arreglar, combinar o escoger, o con el número de formas en que una sucesión de eventos se presenta. Estudiaremos los métodos de enumeración que permitan resolver esta clase de problemas.

1.2. Principio de multiplicación

Supongamos que un procedimiento designado como 1 puede hacerse de n_1 maneras. Supongamos que un segundo procedimiento designado como 2, se puede hacer de n_2 maneras. También supongamos que cada una de las maneras de efectuar 1 puede ser seguida por cualquiera de las maneras de efectuar 2. Entonces el procedimiento que consta de 1 seguido por 2 se puede hacer de $n_1 \cdot n_2$ maneras. Si en las mismas condiciones siguieran los procedimientos 3, 4,..., j, el número de formas en que pueden realizarse los j procedimientos uno seguido del otro es:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_j$$

Para indicar la validez de este principio es mas sencillo considerar el siguiente enfoque esquemático (llamado árbol) con un ejempo concreto. Federico se pondrá un pantalón una camisa y un pullover, dispone de dos pantalones, uno negro y otro gris, tres camisas, blanca, celeste y escosesa, un pullover marrón y otro azul; quiere saber de cuantas maneras puede vestirse.



Está claro que por cada pantalón tiene dos pulloveres, y que por cada elección de pantalón y pullover tiene tres camisas, luego el número de formas en que puede vestirse es:

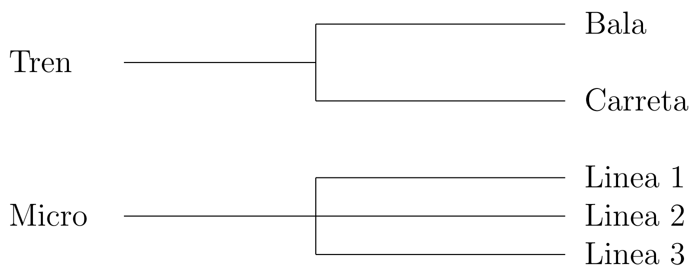
$$N = 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad \longrightarrow \quad N = 12$$

1.3. Principio de adición

Supongamos que un procedimiento, designado como 1, se puede hacer de n_1 maneras, y que un segundo procedimiento, designado como 2, se puede hacer de n_2 maneras. Supongamos además que no es posible que ambos, 1 y 2, se hagan juntos. Entonces el número de maneras en que se puede hacer 1 o 2 es $n_1 + n_2$. Si en las mismas condiciones siguieran los procedimientos 3, 4,..., j, el número de formas en que pueden realizarse los j procedimientos es:

$$N = n_1 + n_2 + ... + n_j$$

Usemos otra vez el enfoque esquemático de un ejemplo para convencernos de la validez del principio de adición. Francisco proyecta un viaje y debe decidir entre el transporte por micro o tren.



Hay tres rutas para el micro y dos para el tren, entonces hay $3 + 2 = 5$ rutas disponibles para el viaje.

1.4. Permutaciones

1.4.1. Permutaciones de n objetos diferentes

Consideremos n objetos diferentes. La pregunta que contestaremos es: ¿De cuántas maneras se pueden agrupar (permutar) estos objetos ?
Por ejemplo, si tenemos los objetos: $\clubsuit\ \heartsuit\ \diamondsuit$ podemos considerar las siguientes resultados: $\clubsuit\ \heartsuit\ \diamondsuit$, $\clubsuit\ \diamondsuit\ \heartsuit$, $\diamondsuit\ \clubsuit\ \heartsuit$, $\diamondsuit\ \heartsuit\ \clubsuit$, $\heartsuit\ \diamondsuit\ \clubsuit$, $\heartsuit\ \clubsuit\ \diamondsuit$. Así la respuesta es 6.
Consideremos el esquema siguiente para aclarar como se puede contar el número de resultados:

Elección 1	Elección 2	Elección 3

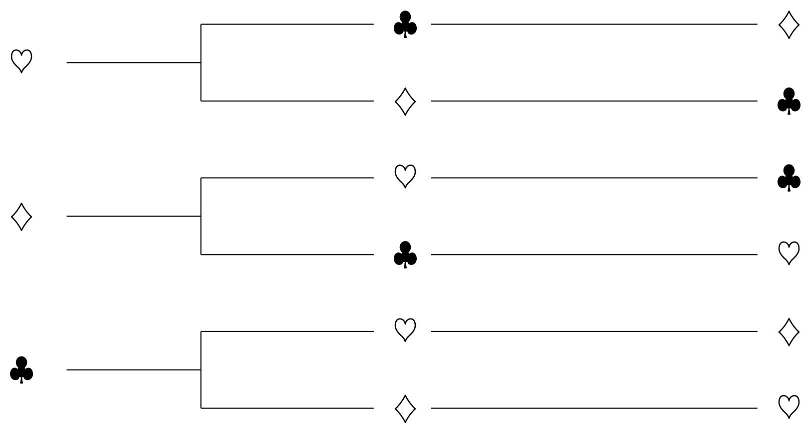
Obtener un resultado será completar los tres compartimientos con los tres objetos; para completar el primero (Elección 1) hay tres posibilidades, para completar el segundo (Elección 2) hay dos posibilidades, y una para terminar completando el tercero

(Elección 3). Si aplicamos el Principio de multiplicación el número de permutaciones será:

$$P(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \longrightarrow \quad P(3) = 6$$

Otra forma de esquematizar los resultados es:

Elección 1   Elección 2   Elección 3



Volvamos ahora a nuestra pregunta original. Agrupar los n objetos es equivalente a ponerlos en una caja con n compartimentos en algún orden específico; o construir un árbol donde para la primera elección habrá n posibilidades, para la segunda elección habrá $n-1$ posibilidades, para la tercera elección habrá $n-2$ posibilidades, ..., para la última elección habrá una sola posibilidad. Aplicando el Principio de multiplicación:

$$P(n) = n\ (n-1)\ (n-2)..,3\ 2\ 1$$

Este número ocurre tan a menudo en matemáticas que presentamos un nombre y un símbolo especiales para él.

Definición: Si n es un entero positivo, definimos el número $n!$ como:

$$n! = n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ ...\ 4\ 3\ 2\ 1$$

y lo llamaremos $factorial\ de\ n$, o simplemente $n - factorial$. Definimos tambien $0! = 1$

Resumiendo: Llamaremos $P(n)$ a las permutaciones de n objetos distintos, y su número será:

$$P(n) = n!$$

1.4.2. Permutaciones con grupos objetos repetidos

Consideremos n objetos entre los cuales hay j iguales. Llamaremos $P(n, j)$ a las permutaciones de los n con j iguales. Está claro que cada vez que cambiemos de lugar los objetos iguales entre sí no obtendremos un resultado distinto, el número de estos cambios es justamente $j!$, luego tendremos la relación:

$$P(n, j)\ j! = P(n) \quad \longrightarrow \quad P(n, j) = \frac{P(n)}{j!}$$

Si tuviéramos n objetos entre los cuales hay j iguales y t iguales, un razonamiento igual al anterior nos conduciría a:

$$P(n, j, t) = \frac{P(n)}{j!\ t!}$$

De esta manera podríamos extendernos a casos con mas grupos iguales.

1.5. Variaciones de n elementos tomando k

1.5.1. Variaciones de n elementos tomando k. Sin repetición

Sean n elementos distintos, se trata de elegir k elementos, también distintos, entre los n dados $(0 \leq k \leq n)$. La situación es similar a la anterior, solo que hay k compartimientos, para el primero hay n posibilidades, para el segundo hay $n-1$ posibilidades, para el tercero hay $n-2$ posibilidades, ..., para el último hay $n-(k-1)$ posibilidades.
Por ejemplo, si tenemos los elementos: $\clubsuit\ \diamondsuit\ \heartsuit\ \spadesuit$, y queremos tomarlos de a dos, habrá cuatro posibilidades para tomar el primero y tres para tomar el segundo, en total doce variaciones. En símbolos:

$$V(4, 2) = 12$$

Se deja como ejercicio la construcción del árbol de resultados. **Importante:** notar que, por ejemplo, el caso $\clubsuit\diamondsuit$ es distinto a $\diamondsuit\clubsuit$.

Resumiendo: Llamaremos $V(n, k)$ a las variaciones de n objetos distintos tomando k, y su número será:

$$V(n, k) = n\ (n-1)\ (n-2)\ ...\ (n-k+1) \quad \longrightarrow \quad V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1.5.2. Variaciones de n elementos tomando k. Con repetición

Sean n elementos distintos, se trata de elegir k elementos que pueden repetirse. Por ejemplo, se tienen cuatro bolillas numeradas del 1 al 4 en un bolillero, se forman números de tres digitos, para ello se extrae una bolilla, se anota el dígito y se repone al bolillero, pudiendo en la siguiente extraccion resultar la misma, de este modo el resultado 222 es posible. En este caso k puede ser mayor que n, en nuestro ejemplo, si reponemos , podríamos formar números de siete cifras con las cuatro bolillas.
En general, si pensamos en k compartimientos, para el primero hay n posibilidades, para el segundo hay n posibilidades, para el tercero hay n posibilidades, ..., para el último hay, también, n posibilidades. Llamaremos $V^*(n, k)$ a las variaciones de n elementos, tomando k de entre ellos, con repetición (o con reposición). El número de esta variaciones será:

$$V^*(n, k) = n^k$$

1.6. Combinaciones de n elementos tomando k

1.6.1. Combinaciones de n elementos tomando k. Sin repetición

Consideremos nuevamente n objetos diferentes. Esta vez estamos interesados en contar el número de maneras en que podemos escoger k de esos n objetos sin considerar el orden.
Por ejemplo, si tenemos los objetos: $\clubsuit$ $\heartsuit$ $\diamondsuit$ y los tomamos de a dos la totalidad de los resultados es:

$$\clubsuit\heartsuit \quad \clubsuit\diamondsuit \quad \diamondsuit\heartsuit$$

No contamos $\clubsuit\heartsuit$ $\heartsuit\clubsuit$ como casos distintos puesto que los mismos objetos están relacionados y sólo difiere el orden.
Llamaremos $C(n, k)$ a las combinaciones de n tomados de a k. Para obtener el resultado general recordemos las fórmulas derivadas anteriormente para el número de maneras de elegir k objetos entre n distinguiendo el orden y para permutar k objetos, en símbolos $V(n, k)$ y $P(k)$. Observar que una vez que se han escogido los k objetos, hay $P(k)$ maneras de permutarlos. Por tanto, si en $C(n, k)$ no se tiene en cuenta el orden valdrá la relación:

$$C(n,k)\ P(k) = V(n,k) \quad \longrightarrow \quad C(n,k)\ k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Finalmente:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$$

Otra notación muy usada para $C(n, k)$ es: $\binom{n}{k}$

1.6.2. Combinaciones de n elementos tomando k. Con repetición

Por último tomemos k elementos de entre n sin que nos importe el orden y pudiendo repetirlos. Por ejemplo queremos saber de cuantas maneras distintas puede comprarse una docena de facturas si se elige entre tres clases. Llamaremos $C^*(n, k)$ a estas combinaciones y las calcularemos:

$$C^*(n,k) = \frac{(n+k-1)!}{k!\ (n-1)!}$$

2. Cálculo de Probabilidades

Aplicaremos lo aprendido, al cálculo de probabilidades de eventos simples. Para ello daremos una modesta introducción al tema. Consideremos una clase de experimentos, a los que llamaremos aleatorios, que estarán caracterizados por:

1. Es posible repetir cada experimento indefinidamente sin cambiar esencialmente las condiciones.

2. Si bien no podemos indicar cual será un resultado particular, podemos describir el conjunto de todos los resultados posibles del experimento.

3. A medida que el experimento se repite los resultados individuales parecen ocurrir en forma caprichosa. Sin embargo, cuando el experimento se repite un gran número de veces, podemos encontrar un modelo definido de regularidad.

Por ejemplo:

1. Se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior.
2. Se lanza una moneda cuatro veces y se cuenta el número de caras obtenidas.
3. Se toman muestras de un decímetro cúbico de semillas de girasol y se cuentan las que no superan cierto tamaño.

Espacio muestral es el conjunto de todos los resultados de un experimento aleatorio.
Evento es un conjunto de resultados de un experimento aleatorio, un subconjunto del espacio muestral.
Daremos una definición "precaria" de probabilidad diciendo que: Si un evento E puede suceder de m maneras entre los i resultados igualmente posibles de un espacio muestral. La probabilidad de dicho evento está dada por:

$$P(E) = \frac{m}{i}$$

Ejemplo: Consideremos el experimento de tirar un dado y anotar el número que aparece en su cara superior. Se considera que es un dado equilibrado. la cantidad de resultados posibles es 6.
El evento A:"sale el número 4" tiene un único resultado posible. Luego $P(A) = \frac{1}{6}$.
El evento B:"sale un número par" tiene tres resultados posibles. Entonces $P(B) = \frac{3}{6}$.

3. Ejercicios

1. Encontrar el número de permutaciones.
   a) ¿Cuántos anagramas distintos pueden formarse con las letras de la palabra FORESTAL?
   b) ¿De cuántas maneras distintas pueden formarse en una fila diez personas?
   c) En una frutería se venden nueve variedades distintas de manzanas. ¿de cuántas maneras diferentes se pueden escribir los nombres de las manzanas sobre un cartel.
2. Encontrar el número de permutaciones con grupos de elementos repetidos.
   a) ¿Cuántos anagramas distintos pueden formarse con las letras de la palabra AGRONOMIA?
   b) ¿De cuántas maneras distintas se pueden ubicar en una mástil tres banderas rojas, cuatro banderas azules y dos banderas verdes?
   c) ¿De cuántas maneras distintas se pueden ubicar en una hilera las piezas blancas de un juego de ajedrez?

3. Encontrar el número de variaciones sin repetición.

    a) Se tienen los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. ¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse?

    b) ¿De cuántas maneras pueden tomarse las letras del conjunto {A,B,C,D,E,F,G} para formar códigos ordenados de cuatro letras distintas?

    c) ¿De cuántas maneras pueden asignarse cuatro alumnos en seis comisiones, si cada comisión recibe a lo sumo un alumno?

4. Encontrar el número de variaciones con repetición.

    a) Se tienen los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse?

    b) ¿De cuántas maneras pueden tomarse las letras del conjunto {A,B,C,D,E,F,G} para formar códigos ordenados de cuatro letras?

    c) ¿De cuántas maneras pueden asignarse cuatro alumnos en seis comisiones?

5. Encontrar el número de combinaciones sin repetición.

    a) En un examen, un alumno debe seleccionar seis preguntas de un grupo de diez, sin importar el orden. ¿De cuántas maneras puede realizar la selección?

    b) Si hay diez jugadores de basquet, ¿cuántos equipos distintos pueden formarse si no se distinguen los puestos que los jugadores ocupan en la cancha?

    c) ¿De cuántas maneras pueden comprarse tres lapiceras de distinto color si hay para elegir ocho colores?

6. Encontrar el número de combinaciones con repetición.

    a) ¿De cuántas maneras puede comprarse una docena de facturas si hay para elegir tres clases?

    b) ¿De cuántas maneras pueden comprarse tres lapiceras si hay para elegir ocho colores?

    c) ¿Cuántas cajas distintas con media docena de empanadas puede prepararse si hay para elegir nueve clases?

7. Se tienen tres libros de botánica dos de apicultura y cuatro de biología

    a) ¿De cuántas maneras pueden acomodarse en un estante?

    b) ¿De cuántas maneras pueden acomodarse, si los libros de botánica deben estar juntos?

    c) ¿De cuántas maneras, si se empieza siempre con los libros de apicultura juntos y a la izquierda?

8. ¿Cuantas patentes de tres letras mayúsculas seguidas de tres números pueden formarse?

9. En un grupo de veinte personas hay doce mujeres y ocho hombres. Se debe formar una comisión de cinco miembros.

   a) ¿De cuántas maneras puede hacerse?

   b) ¿De cuántas maneras, si debe haber un solo hombre?

   c) ¿De cuántas maneras, si debe haber exactamente tres hombres?

   d) ¿De cuántas maneras, si debe haber al menos tres hombres?

10. Un byte está formado por ocho bit (acrónimo de Binary Digit), cada uno de estos bit puede tomar dos valores, cero o uno. ¿Cuántos byte distintos pueden formarse?

11. Se arroja dos veces un dado equilibrado. Calcular la probabilidad de obtener dos números que sumados den cuatro.

12. En un apiario hay 50 colmenas, cinco estan afectadas por nosemosis.

    a) Si se elige una colmena al azar, calcular la probabilidad de que esté infectada.

    b) Si se eligen tres colmenas al azar, calcular la probabilidad de que las tres estén infectadas.

    c) Si se eligen tres colmenas al azar, calcular la probabilidad de que por lo menos una esté infectada.

13. De un grupo, de ocho hombres y siete mujeres se elegirá un grupo de cuatro personas para formar un comité.

    a) Calcular la probabilidad de que se elijan dos hombres y dos mujeres.

    b) Calcular la probabilidad de que el comité tenga por lo menos una mujer.

14. Suponer que se extraen dos cartas de una baraja española.

    a) Calcular la probabilidad de sacar dos cuatros.

    b) Calcular la probabilidad de que ambas sean espadas.

15. Se tiene un bolillero con tres bolillas numeradas del uno al tres. Se extraen las tres bolillas

    a) Calcular la probabilidad de que el número que resulta sea par.

    b) Calcular la probabilidad de que el número que resulta comience con uno.

16. Suponer que se extraen tres cartas de una baraja española.

    a) Calcular la probabilidad de sacar tres cuatros.

    b) Calcular la probabilidad de sacar el as de espadas.

    c) (Solo para jugadores de truco) Calcular la probabilidad de tener treinta y tres de envido, si se juega sin flor.