Capítulo 8

Vectores en el plano

8.1. Definiciones básicas

8.1.1. Magnitudes escalares y vectoriales.

Hay magnitudes que quedan determinadas dando un solo número real, su medida. Por ejemplo: la longitud de una varilla, la masa de un cuerpo o el tiempo transcurrido entre dos sucesos. Tales magnitudes se llaman **escalares**, y pueden ser representadas por puntos sobre una recta. Otros ejemplos de escalares son: la densidad, el volumen, el trabajo, la potencia, etc.

Para otras magnitudes, en cambio, no basta dar un número para determinarlas. Para la velocidad de una partícula, por ejemplo, no basta conocer su intensidad, sino que hace falta conocer, además, la dirección y el sentido en que se mueve la partícula. La dirección viene dada por una recta, de manera tal que todas las rectas paralelas tienen la misma dirección, y en cambio rectas no paralelas tienen direcciones diferentes. Cada dirección tiene dos sentidos, determinados por las dos orientaciones posibles en la recta. Lo mismo que con las velocidades ocurre con las fuerzas: su efecto depende no sólo de la intensidad, sino también de la dirección y sentido en que actúan. Estas magnitudes en las cuales hay que distinguir su intensidad (que es

una magnitud esca1ar), su dirección y su sentido, se llaman **magnitudes vectoriales**. Otros ejemplos son: la aceleración, la cantidad de movimiento, la intensidad de un campo eléctrico, de un campo magnético, etc. Las magnitudes vectoriales ya no se pueden representar, como los escalares, por puntos tomados sobre una misma recta. Hay que tomar segmentos de longitud variable (indicadora de la intensidad) a partir de un punto fijo, los cuales tengan la dirección y el sentido correspondientes. Resumiendo y precisando, podemos establecer las siguientes definiciones:

Números
Ejemplos:
longitud de un hilo, tiempo entre dos sucesos, etc.

Definición 1: Se dice que una magnitud es un **escalar** cuando el conjunto de sus valores se puede poner en correspondencia biunívoca y continua con el conjunto de los números reales o una parte del mismo.

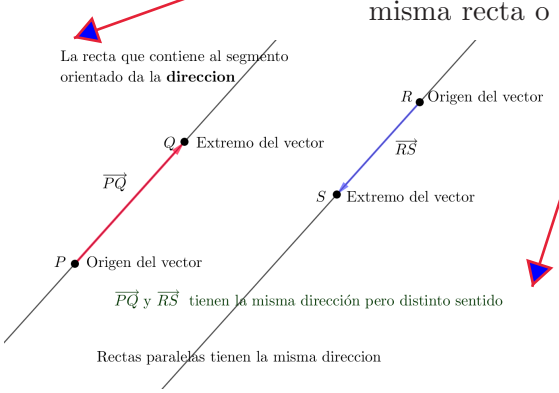
Segmentos orientados
Ejemplos:
velocidad de un móvil, aceleración de un móvil, etc.

Definición 2: Una magnitud se llama **vectorial** cuando el conjunto de sus valores puede ponerse en correspondencia biunívoca y continua con el conjunto de los segmentos orientados o con una parte del mismo. Un segmento de recta queda determinado por sus dos puntos extremos, cuando estos puntos están dados en un cierto orden, se dice que el segmento es orientado.

8.1.2. Vectores

Definición 3: Se llama *vector* a todo segmento orientado. El primero de los puntos que lo determinan se llama *origen* y el segundo *extremo* del vector.

La recta que contiene el vector determina la dirección del mismo y la orientación sobre la recta, definida por el origen y el extremo del vector, determina el sentido de este último. Todos los vectores situados sobre una misma recta o rectas paralelas tienen la misma dirección. Sobre cada recta s opuestos. Toda magnitud vectorial puede representarse por



un vector, cuya longitud sea proporcional a la intensidad y cuya dirección y sentido sean los correspondientes a la magnitud.

Notación: Hay varias formas de nombrar simbólicamente los vectores. En estas notas utilizaremos letras con una flecha encima. También un par de letras mayúsculas con una flecha encima, en esta forma de indicar un vector, las letras representan al origen y extremo del vector en ese orden. Por ejemplo: $\vec{A}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{PQ}$

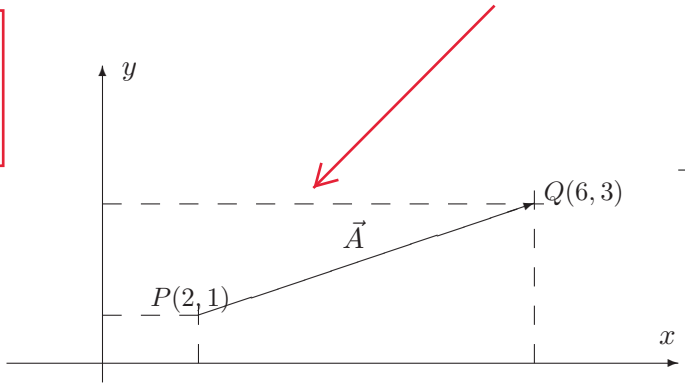
Definición 4: Se llama módulo de un vector a la longitud del segmento orientado que lo define.

El módulo de un vector es siempre un número positivo. Si el vector es $\vec{A} = \overrightarrow{PQ}$, el módulo puede representarse por cualquiera de las tres maneras:

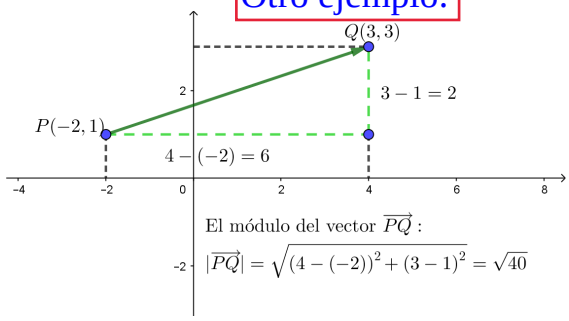
$$mod\vec{A} = |\vec{A}| = |\overrightarrow{PQ}|$$

Ejemplo : Si el vector $\vec{A}$ tiene por origen $P(2,1)$ y por extremo $Q(6,3)$, entonces (recordar el teorema de Pitágoras): $|\vec{A}| = \sqrt{(6-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20}$

La dirección del vector la da la recta que pasa por los puntos P y Q



Otro ejemplo:

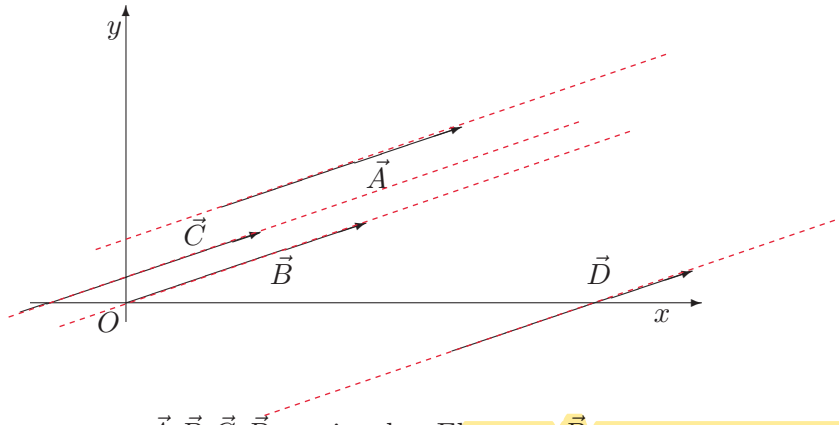


Cuando el módulo es nulo el segmento se reduce a un punto y no puede hablarse de vector, puesto que faltan la dirección y el sentido. Sin embargo, por conveniencia se define como **vector nulo** al que tiene su módulo igual a cero.

8.1.3. Igualdad de vectores

Definición 5: Dos vectores se dicen **iguales** cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Con este criterio de igualdad, todos los vectores iguales pueden ser trasladados de manera que tengan el mismo origen $O(0,0)$. De esta manera cada vector y todos sus iguales tendrán un solo representante como vector de origen O.



Los vectores $\vec{A}$ $\vec{B}$ $\vec{C}$ $\vec{D}$ son iguales. El vector $\vec{B}$ es su representante con origen en O.

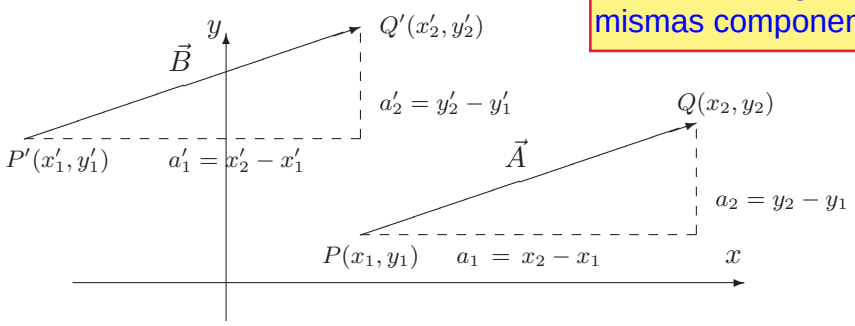
8.2. Componentes de un vector

Definición 6: Se llaman *componentes* de un vector $\vec{A}$ respecto del sistema de coordenadas con origen O y ejes x, y a los números:

$$a_1 = x_2 - x_1 \qquad a_2 = y_2 - y_1$$

Donde (x_1, y_1) es el origen de $\vec{A}$ y (x_2, y_2) es su extremo. **Importante: todos los vectores iguales (misma dirección , sentido y módulo) tienen las mismas componentes.**

Los vectores iguales tienen las mismas componentes



Si $a_1' = a_1$ y $a_2' = a_2$ entonces $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores iguales ya que tienen las mismas componentes.

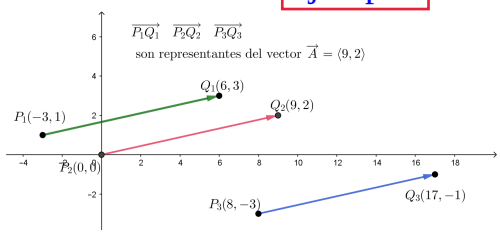
Notación: $\boxed{\vec{A} = \vec{B} = \langle a_1, a_2 \rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle.}$

Ejemplo: Sea el vector $\vec{A} = \overrightarrow{PQ}$, donde $P(2,1)$ y $Q(6,3)$, entonces las componentes de $\vec{A}$ son $a_1 = 6 - 2 = 4$ y $a_2 = 3 - 1 = 2$. El vector puede escribirse como $\vec{A} = \langle 4, 2 \rangle$ y su módulo es $|\vec{A}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$.

Un vector con las mismas componentes que $\vec{A}$ pero con origen en $P_1(8, -3)$ debe tener extremo en $Q_1(x_1, y_1)$ de modo que: $\begin{cases} x_1 - 8 = & 4 \\ y_1 - (-3) = & 2 \end{cases}$ Luego, $x_1 = 12$ y $y_1 = -1$

Un vector con las mismas componentes que $\vec{A}$ pero con origen en $O(0,0)$ debe tener extremo en $Q_2(x_2, y_2)$ de modo que: $\begin{cases} x_2 - 0 = & 4 \\ y_2 - 0 = & 2 \end{cases}$ Luego, $x_2 = 4$ y $y_2 = 2$.

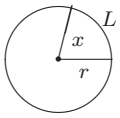
Ejemplo:



8.3. Cosenos directores de un vector

8.3.1. Medida de un ángulo en radianes

La medida de un ángulo x en radianes queda definida como el cociente entre la longitud del arco y la longitud del radio en cualquier circunferencia que tenga como centro el vértice del ángulo.



x en radianes$= \dfrac{L}{r}$

Es fácil ver que si un ángulo mide 360° en el sistema sexagesimal entonces mide 2π radianes en el sistema que utilizaremos en este capítulo.

Esta relación permite pasar de un sistema de medición angular a otro.

Como veremos mas adelante (funciones trigonométricas), dependiendo de la medida del ángulo, tiene sentido considerar el seno, la tangente y el coseno de un ángulo de cualquier medida. Tanto seno, coseno y tangente pueden ser positivos o negativos según que ángulo se considere.

si $0 < x < \pi/2$	$\operatorname{sen} x > 0$	$\cos x > 0$	$\operatorname{tg} x > 0$
si $\pi/2 < x < \pi$	$\operatorname{sen} x > 0$	$\cos x < 0$	$\operatorname{tg} x < 0$
si $\pi < x < 3\pi/2$	$\operatorname{sen} x < 0$	$\cos x < 0$	$\operatorname{tg} x > 0$
si $3\pi/2 < x < 2\pi$	$\operatorname{sen} x < 0$	$\cos x > 0$	$\operatorname{tg} x < 0$

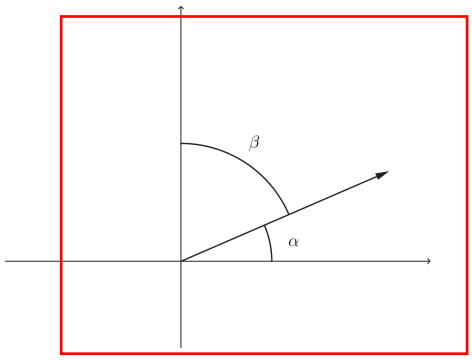
Para algunos ángulos es sencillo calcular los valores exactos de sus funciones trigonométricas, por ejemplo:

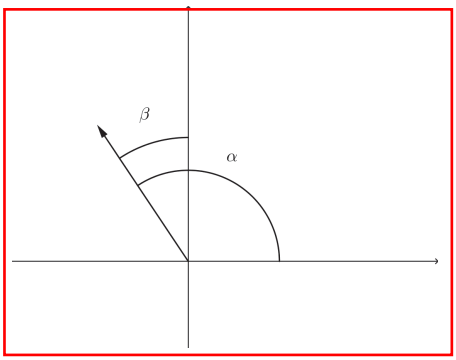
ángulo	seno	coseno	tangente
0	0	1	0
$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	no existe
π	0	-1	0
$3\pi/2$	-1	0	no existe
2π	0	1	0

8.3.2. Ángulos directores y Cosenos directores

Definición 7: Se llaman *ángulos directores* de un vector, respecto de un sistema de coordenadas ortogonales con origen O y ejes x, y a los ángulos que el vector forma con el semiejes positivos coordemados. Los ángulos se toman entre 0 y π.

Definición 8: Se llaman *cosenos directores* de un vector, respecto de un sistema de coordenadas ortogonales con origen O y ejes x, y, a los cosenos de los ángulos directores. Los cosenos directores pueden ser positivos o negativos.





Si el vector está en el primer cuadrante

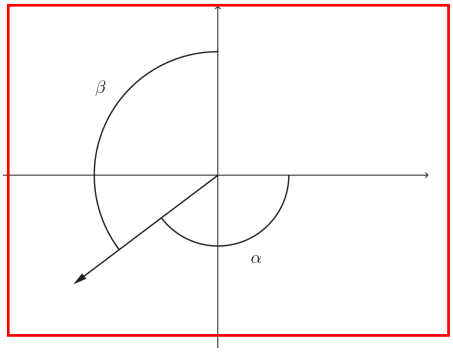
α y β son ángulos menores que $\frac{\pi}{2}$

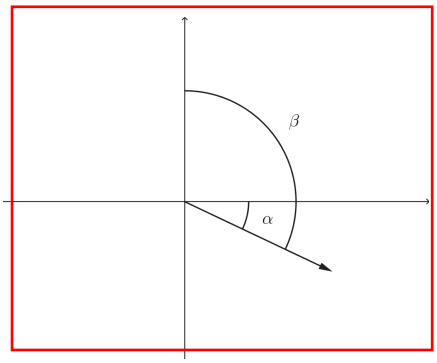
$\cos\alpha > 0$ y $\cos\beta > 0$

Si el vector está en el segundo cuadrante

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

$\cos\alpha < 0$ y $\cos\beta > 0$





Si el vector está en el tercer cuadrante

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

$\cos\alpha < 0$ y $\cos\beta < 0$

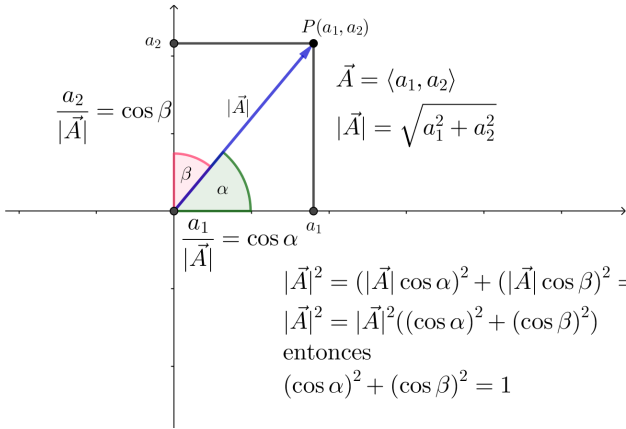
Si el vector está en el cuarto cuadrante

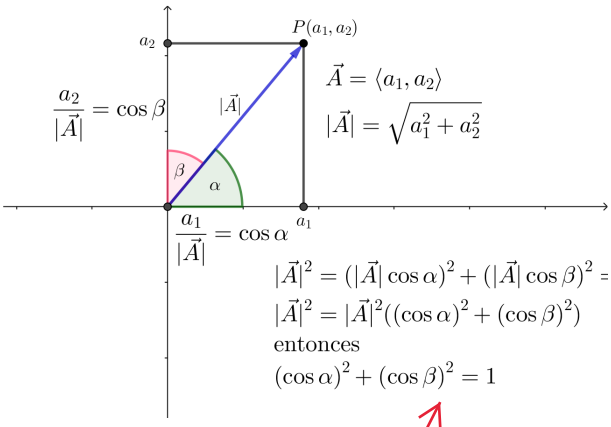
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

$\cos\alpha > 0$ y $\cos\beta < 0$

Si $\vec{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y sus ángulos directores son α y β, se cumple que

$a_1 = |\vec{A}| \cos\alpha$ $\quad$ $a_2 = |\vec{A}| \cos\beta$





Además es sencillo comprobar que

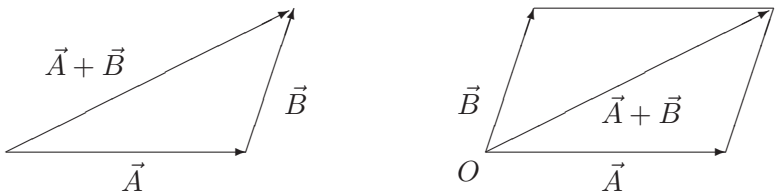
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

8.4. Operaciones con vectores

8.4.1. Suma

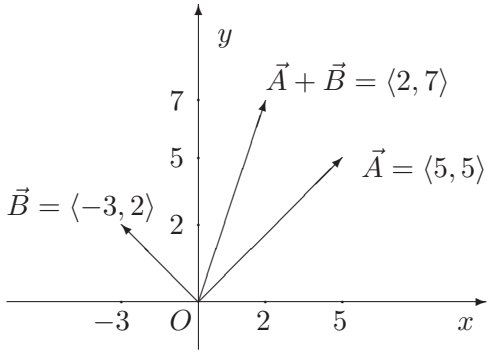
Definición 9: El vector suma de dos vectores $\boxed{\vec{A} = \langle a_1, a_2 \rangle \text{ y } \vec{B} = \langle b_1, b_2 \rangle}$ es el vector $\boxed{\vec{A} + \vec{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle}$.

Método gráfico: Para sumar dos vectores $\vec{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ se procede de la siguiente manera: se hace coincidir el extremo de $\vec{A}$ con el origen de $\vec{B}$ y el vector cuyo origen es el origen de $\vec{A}$ y cuyo extremo es el extremo de $\vec{B}$ es el vector $\vec{A} + \vec{B}$. Al mismo resultado se llega tomando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con el mismo origen, el vector suma coincide con la diagonal del paralelogramo que parte del origen.



Ejemplos:

1) Si $\vec{A} = \langle 5, 5 \rangle$ y $\vec{B} = \langle -3, 2 \rangle$ entonces $\vec{A} + \vec{B} = \langle 2, 7 \rangle$



2) Si $\vec{A}=\langle 5,3\rangle$ y llamamos

$\vec{A}_x=\langle 5,0\rangle$, es un vector con la dirección del eje x

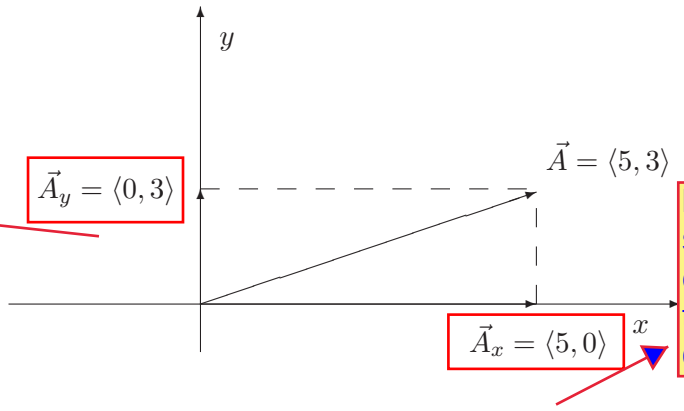
$\vec{A}_y=\langle 0,3\rangle$, es un vector con la dirección del eje y.

Entonces

$$\boxed{\vec{A}=\langle 5,0\rangle+\langle 0,3\rangle=\vec{A}_x+\vec{A}_y.}$$

Conclusión: *Cualquier vector se puede escribir como la suma de dos vectores que tienen la dirección de los ejes coordenados.*

los vectores con primera componente 0 tienen la dirección del eje y



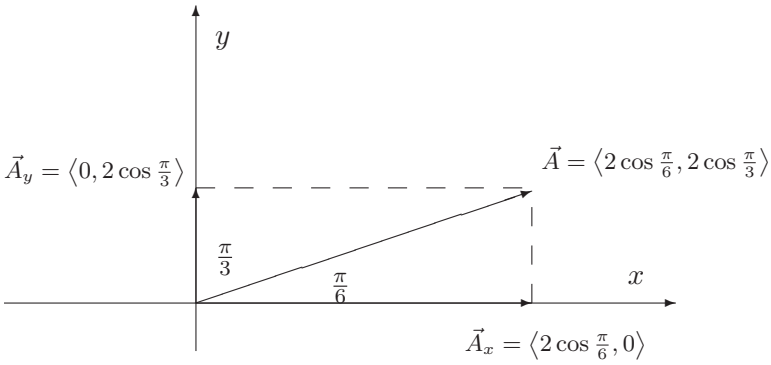
los vectores con segunda componente 0 tienen la dirección del eje x

3) Si $\vec{A}$ es tal que $\boxed{|\vec{A}|=2}$ y $\boxed{\alpha=\frac{\pi}{6}}$. Los vectores con las direcciones de los ejes coordenados son

$$\vec{A}_x=\Big\langle |\vec{A}|\cos\alpha,0\Big\rangle \qquad \vec{A}_y=\Big\langle 0,|\vec{A}|\cos\beta\Big\rangle$$

Entonces $\vec{A} = \langle 2\cos\frac{\pi}{6}, 2\cos\frac{\pi}{3}\rangle = \langle\sqrt{3}, 1\rangle$

$\vec{A}_x = \langle 2\cos\frac{\pi}{6}, 0\rangle = \langle\sqrt{3}, 0\rangle$ y $A_y = \langle 0, 2\cos\frac{\pi}{3}\rangle = \langle 0, 1\rangle$



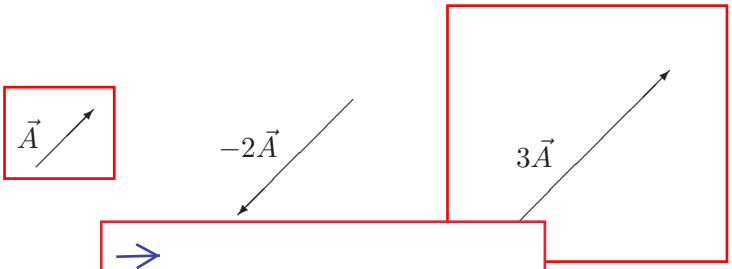
8.4.2. Producto de un escalar por un vector

Definición 10: Se llama producto $\lambda\vec{A}$ del vector $\vec{A}$ por el escalar λ, al vector que tiene:

a) el módulo igual al producto del módulo de $\vec{A}$ por el valor absoluto de λ

b) la misma dirección que $\vec{A}$

c) el mismo sentido que $\vec{A}$ si λ es positivo y el sentido opuesto si λ es negativo.



$\vec{-2A}$ tiene la misma dirección que $\vec{A}$, sentido opuesto y el doble del módulo

Observaciones:

- Si $\vec{A} = \langle a_1, a_2\rangle$ entonces $\boxed{\lambda\vec{A} = \langle\lambda a_1, \lambda a_2\rangle}$
- Si $\boxed{\lambda = \frac{1}{|\vec{A}|}}$ entonces el vector $\lambda\vec{A} = \langle\lambda a_1, \lambda a_2\rangle$, será un vector de

$$\overrightarrow{\lambda A} = \langle\lambda a_1, \lambda a_2\rangle$$

$$|\overrightarrow{\lambda A}| = \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2} = \sqrt{\lambda^2(a_1^2 + a_2^2)} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)} =$$

$$|\overrightarrow{\lambda A}| = |\lambda|\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)} = |\lambda||\vec{A}|$$

$$\boxed{\text{Si } \lambda = \frac{1}{|\vec{A}|} \text{ entonces } |\overrightarrow{\lambda A}| = 1}$$

módulo unidad y de la misma dirección y sentido que $\vec{A}$ llamado **vector unitario** o **versor**.

Ejemplo:

- Si $\vec{A} = \langle -2, 4\rangle$, entonces $\boxed{\frac{1}{4}\vec{A} = \left\langle -\frac{1}{2}, 1\right\rangle}$ que tiene la misma dirección y sentido que $\vec{A}$.

  $-3\vec{A} = \langle 6, -12\rangle$ y tiene la misma dirección que $\vec{A}$ pero sentido opuesto y módulo $|-3|\,|\vec{A}| = 6\sqrt{5}$.

- Si $\vec{A} = \langle -2, 4\rangle$, entonces $|\vec{A}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ y el vector:

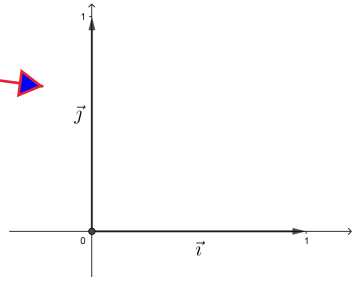
$$\vec{A}_u = \left\langle -\frac{2}{2\sqrt{5}}, \frac{4}{2\sqrt{5}}\right\rangle$$

  tiene la misma dirección y sentido que $\vec{A}$ pero con módulo 1.

8.5. Versores fundamentales

Dado un sistema de coordenadas ortogonales, se considera sobre cada uno de los ejes y coincidiendo con el sentido positivo de los mismos los versores: $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ cuyas componentes son:

$$\vec{\imath} = \langle 1, 0\rangle \qquad \vec{\jmath} = \langle 0, 1\rangle$$



y se llaman **versores fundamentales**.

Todo vector $\vec{A} = \langle a_1, a_2\rangle$ puede escribirse en la forma:

$$\vec{A} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath}$$

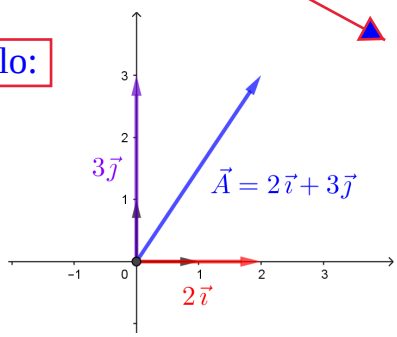
Esta descomposición de un vector como suma de dos vectores en la dirección de los ejes coordenados es muy importante y útil. A esta forma de expresar el vector se la llama **descomposición canónica**.

Ejemplos:

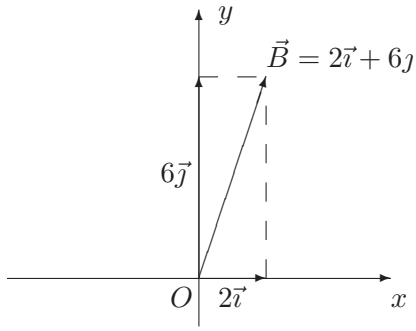
1) Dado el vector $\vec{A}$, con origen en $P(-3, 5)$ y extremo en $Q(4, 7)$ podemos escribirlo en función de sus componentes como:

$\vec{A} = \langle 7, 2\rangle = 7\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

Ejemplo:



2) $\vec{B} = \langle 2, 6 \rangle$ puede representarse gráficamente como sigue:



8.6. Ejercicios

1. Dado $\vec{A} = \langle 4, -2 \rangle$; hallar:

   a) el extremo del representante cuyo origen es $P(3, 1)$;

   b) el origen, del representante cuyo extremo es $Q(7, 5)$;

   c) el módulo de $\vec{A}$.

2. $\bigotimes$ Hallar las componentes y los cosenos directores de vectores paralelos a los ejes coordenados. Graficar.

3. Dado $\vec{A}$ tal que $|\vec{A}| = 2$ y uno de sus dos ángulos directores es: $\alpha = \pi/3$

   a) Calcular sus componentes.

   b) Hallar el extremo de su representante cuyo origen es $P(-1, 3)$.

   c) Hallar el origen del representante, cuyo extremo es $B(7, -6)$.

4. Calcular los cosenos directores del vector $\vec{A} = \langle 3/13 \ , \ 4/13 \rangle$

5. ¿Puede un vector formar con dos ejes coordenados los siguientes ángulos?

   a) $\alpha = \pi/6 \qquad \beta = \pi/4$

   b) $\alpha = \pi/3 \qquad \beta = \pi/3$

c) $\alpha = 5\pi/6 \qquad \beta = \pi/6$

6. $\otimes$ Representar en el mismo gráfico los vectores $\vec{A}_1 = \langle 4, -3 \rangle$ $\vec{A}_2 = \langle 2, 5 \rangle$ y su suma $\vec{S} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$. Calcular el módulo de $\vec{S}$ y el ángulo que forma $\vec{S}$ con $\vec{A}_1$ y con $\vec{A}_2$ (recordar el Teorema del coseno que está al final de Ejercicios).

7. $\otimes$ Representar en el mismo gráfico los vectores:
$\vec{B}_1 = \langle 4, 2 \rangle\,,\ \ \vec{B}_2 = \langle 2, 1 \rangle$
$\vec{B}_3 = \langle -1, -1/2 \rangle\,,\ \ \vec{S}_1 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,\ \ \vec{S}_2 = \vec{B}_1 + \vec{B}_3.$
Calcular el módulo de $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$. Calcular el ángulo que forma $\vec{S}_1$ con $\vec{B}_1$. Calcular el ángulo que forma $\vec{S}_2$ con $\vec{B}_3$.

8. $\otimes$ Representar en el mismo gráfico los vectores
$\vec{B}_1 = \langle -6, 3 \rangle\,,\ \ \vec{B}_2 = \langle 2, -5 \rangle$
$\vec{R}_1 = -2\vec{B}_1,\ \ \vec{R}_2 = \frac{1}{2}\vec{B}_1,\ \ \vec{R}_3 = 3\vec{B}_2,\ \ \vec{T}_1 = \vec{R}_1 + \vec{R}_3.$

Definiciones para los siguientes ejercicios:

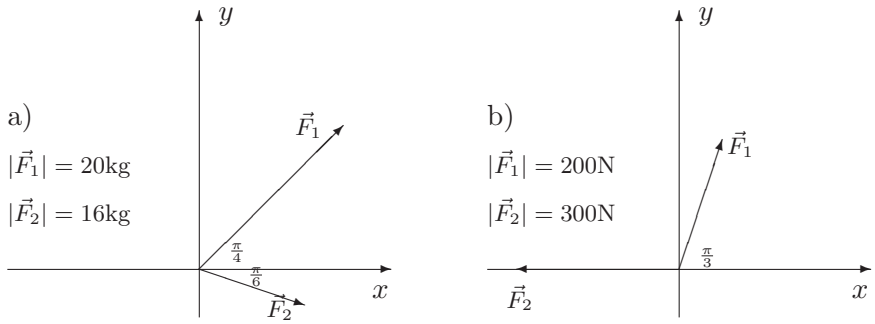
Fuerza resultante: Cuando un cuerpo sufre la acción de dos o más fuerzas sus efectos pueden ser sustituidos por la acción de una única fuerza denominada **fuerza resultante**.

En concreto, la fuerza resultante de un sistema de fuerzas se obtiene mediante la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

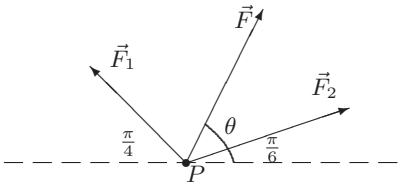
Newton: En Física, un **Newton** (símbolizado con **N**) es la unidad de medida de la fuerza en el Sistema Internacional de Unidades:

$$1\,\mathrm{N} = 1\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

9. ⊗ En el gráfico los vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ representan fuerzas. En cada caso encontrar la magnitud (módulo) de la fuerza resultante y el ángulo que forma con el eje x positivo.



10. ⊗ Dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ cuyas magnitudes son 10 y 12 N actúan sobre un objeto que se encuentra en un punto P. Hallar la fuerza resultante $\vec{F}$, su magnitud y calcular el ángulo θ.



11. ⊗ Sobre un cuerpo actúan dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ $|\vec{F}_1| = 80$ Newton y $|\vec{F}_2| = 50$ Newton.

a) Representar gráficamente (teniendo en cuenta una escala adecuada, por ejemplo: 1cm. cada 10Newton) $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ en un sistema cartesiano donde el eje x coincida con la dirección de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ se encuentre en el primer cuadrante.

b) Calcular $\vec{F}_{1x}$ $\vec{F}_{2x}$ $\vec{F}_{1y}$ y $\vec{F}_{2y}$

c) Hallar $\vec{R}_x = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x}$ y $\vec{R}_y = \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y}$ que sumados dan la fuerza resultante.

12. $\otimes$Un cuerpo es colgado con dos cuerdas, una de 3 metros y la otra de 4 metros. Las cuerdas se atan en sendos ganchos, fijos en el techo, que distan entren sí 5 metros. El peso del cuerpo (fuerza con que la tierra lo atrae) es de 120 Newton. Cada cuerda ejerce sobre el cuerpo una fuerza que llamaremos tensión. La tensión tiene la dirección que da la cuerda tensa. Realizar un esquema de la situación, utilizar los teoremas del seno o del coseno (ver al final del ejercicio) para calcular los ángulos del triángulo determinado por las cuerdas y el techo. Se pretende calcular el módulo de cada tensión, para ello asumiremos que el cuerpo está quieto, luego la suma de las fuerzas exteriores que se aplican sobre el cuerpo debe ser cero. Desarrolle los siguientes procedimientos.

    a) La suma vectorial de las tensiones debe dar un vector del mismo módulo y dirección que el peso pero de sentido contrario. Resolver gráficamente utilizando una escala adecuada.

    b) Utilizar el teorema del seno para resolver la situación anterior.

    c) Considere un sistema de ejes cartesianos, encontrar las proyecciones de los vectores en cada eje, la suma en cada eje debe ser nula.

13. Si en las mismas condiciones del problema anterior los datos fueran las tensiones obtenidas calcular el peso.

    a) Considerando el sistema de ejes cartesianos.

    b) Utilizando el teorema del coseno.

    Teorema del seno: Dado un triángulo de lados A B C y ángulos α β γ, donde α es el ángulo opuesto a A, β es el ángulo opuesto a B y γ es el ángulo opuesto a C, se tiene:

$$\frac{A}{\text{sen}\alpha} = \frac{B}{\text{sen}\beta} = \frac{C}{\text{sen}\gamma}$$

Teorema del coseno: Dado un triángulo de lados $A\ B\ C$ y ángulos $\alpha\ \beta\ \gamma$, donde α es el ángulo opuesto a A, β es el ángulo opuesto a B y γ es el ángulo opuesto a C, se tiene:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\ \cos\alpha$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC\ \cos\beta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\ \cos\gamma$$

14. $\bigotimes$ Dados el vector $\overrightarrow{AB}$, de origen en $A(1,2)$ y extremo en $B(2,3)$ y el vector $\overrightarrow{AP}$, de origen en $A(1,2)$ y extremo en $P(x,y)$ es un punto cualquiera de la recta que contiene a $\overrightarrow{AB}$.

    a) Representar gráficamente esta situación.

    b) Considerar la igualdad entre vectores como la igualdad de sus componentes. Si $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$, donde t es un número real, se puede eliminar t de las dos ecuaciones escalares que resultan. Dar la interpretación de la ecuación obtenida.

15. Con la idea presentada en el ejercicio anterior, encontrar la ecuación de la recta dirigida por el vector $\vec{v} = \langle a, b\rangle$ que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$.

Aclaración: *La mayoría de los ejercicios pueden verificarse utilizando software del siguiente modo:*
Los señalados con $\bigotimes$ pueden resolverse utilizando un software de matemática dinámica.
Los señalados con $\odot$ pueden resolverse utilizando software de algebra computacional.
En el Anexo que aparece al final del libro se dan pautas sobre los programas recomendados para cada caso.