Matemática

Semana 22/06
Encuentro 13

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

Seguí las actualizaciones en el aula virtual ¡!

22/06 al 25/06	Capítulo 8. Vectores en el plano. (segunda parte)

Ejercicios recomendados	**Ejercicios de profundización**
1,3,4,**7,8,9,10**	2,5,**6,11,12,13,14,15**

En color los ejercicios para esta segunda parte

- # Indicaciones generales.

Capítulo 8.Vectores en el plano.

Material disponible en:

Libro
Aula virtual

- # Actividades

Ejemplos

Consultas

Libro

Material disponible en el Libro

Capítulo 8.Vectores en el plano.

(parte 2)

8.4 Operaciones entre vectores **pp.106-109**

8.4.1. Suma

8.4.2. Producto de un escalar por un vector

8.5 Versores fundamentales **pp.109-110**

Actividades

Operaciones con vectores

8.4.1. Suma

Definición 9: El vector suma de dos vectores $\vec{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ es el vector $\vec{A} + \vec{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$.

8.4.2. Producto de un escalar por un vector

Definición 10: Se llama producto $\lambda\vec{A}$ del vector $\vec{A}$ por el escalar λ, al vector que tiene:

- Si $\vec{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ entonces $\lambda\vec{A} = \langle \lambda a_1, \lambda a_2 \rangle$

Ejemplos: Si $\overrightarrow{A} = \langle 3, -1 \rangle$ y $\overrightarrow{B} = \langle -2,3 \rangle$ calcular:

$\vec{A} + \vec{B},\ -\vec{B},\ \vec{A} - \vec{B},\ 3\,.\,\vec{B}$

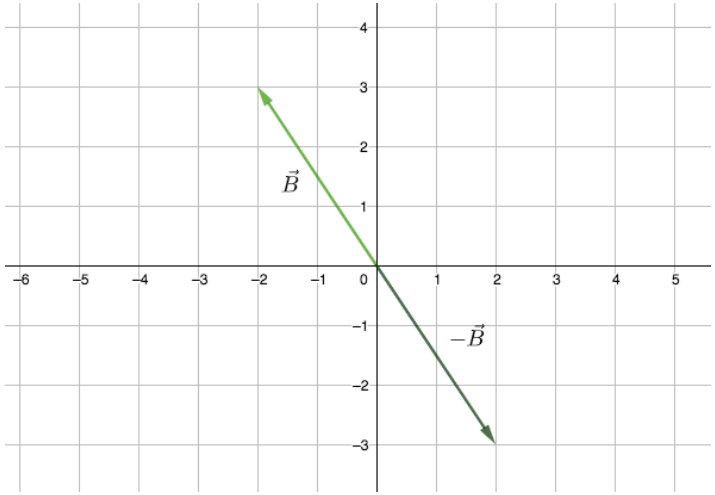
$$\overrightarrow{A} = \langle 3, -1 \rangle \; y \; \overrightarrow{B} = \langle -2,3 \rangle$$

$\vec{A} + \vec{B}$	$\langle 3 + (-2), -1 + 3 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$
$-\vec{B}$	$\langle -(-2), -3 \rangle$	$\langle 2, -3 \rangle$
$\vec{A} - \vec{B}$	$\langle 3 - (-2), -1 - 3 \rangle$	$\langle 5, -4 \rangle$
$3 \,.\, \vec{B}$	$\langle 3.(-2), 3.3 \rangle$	$\langle -6, 9 \rangle$
$-2\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}$	$-2.\langle 3, -1 \rangle + \frac{1}{2}\langle -2,3 \rangle =$ $\langle -2.3, -2.(-1) \rangle + \left\langle \frac{1}{2}(-2), \frac{1}{2}3 \right\rangle =$ $\langle -6,2 \rangle + \left\langle -1, \frac{3}{2} \right\rangle = \left\langle -6 - 1, 2 + \frac{3}{2} \right\rangle$	$\left\langle -7, \frac{7}{2} \right\rangle$

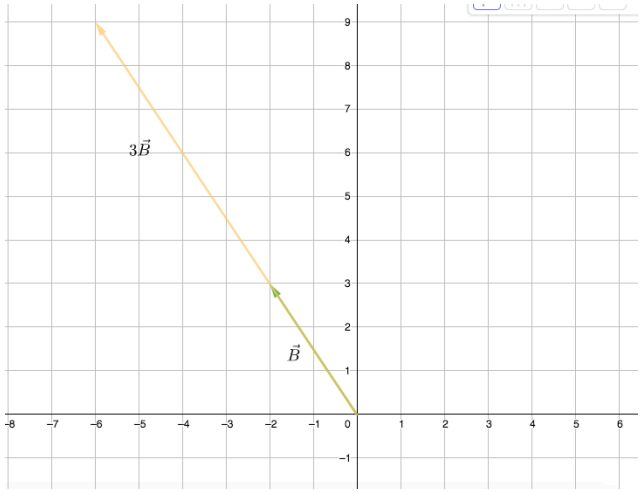
$$\left\langle -2.3 + \frac{1}{2}.(-2), -2(-1) + \frac{1}{2}.3 \right\rangle$$

Gráficamente $\overrightarrow{B} = \langle -2,3 \rangle$

$-\vec{B} = \langle 2, -3 \rangle$



$3 \,.\, \vec{B} = \langle -6, 9 \rangle$



La dirección de $-\vec{B}$ es <u>IGUAL a la dirección</u> de $\overrightarrow{B}$ → Se dicen **colineales**

La dirección de $3 \,.\, \vec{B}$ es <u>IGUAL a la dirección</u> de $\overrightarrow{B}$ → Se dicen **colineales**

El sentido de $-\vec{B}$ es opuesto al de $\overrightarrow{B}$ → forman un ángulo de 180º

El sentido de $3 \,.\, \vec{B}$ es igual al de $\overrightarrow{B}$ → forman un ángulo de 0º

El módulo de $-\vec{B}$ es igual al de $\overrightarrow{B}$

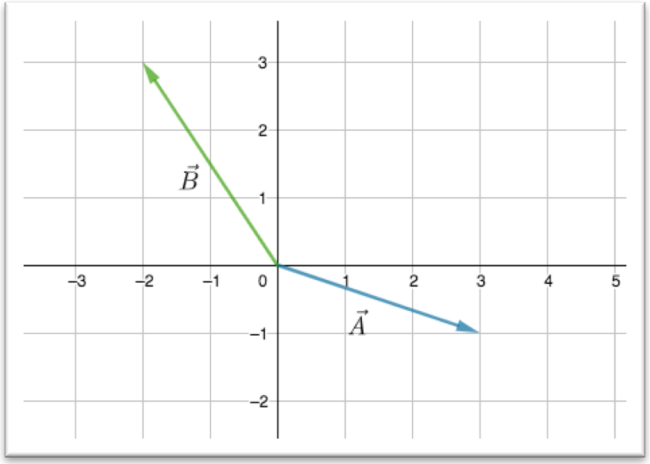
El módulo de $3 \,.\, \vec{B}$ es 3 veces mayor que el $\overrightarrow{B}$

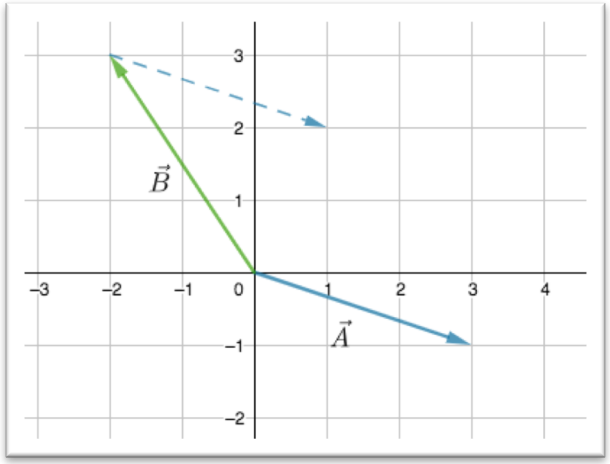
Método Gráfico para hallar la suma de vectores

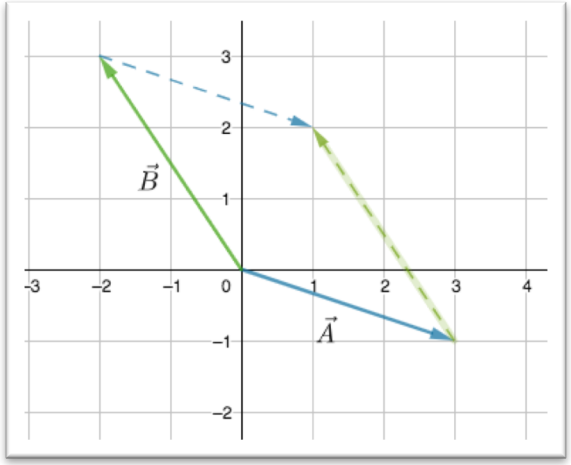
Observación: los vectores no son colineales

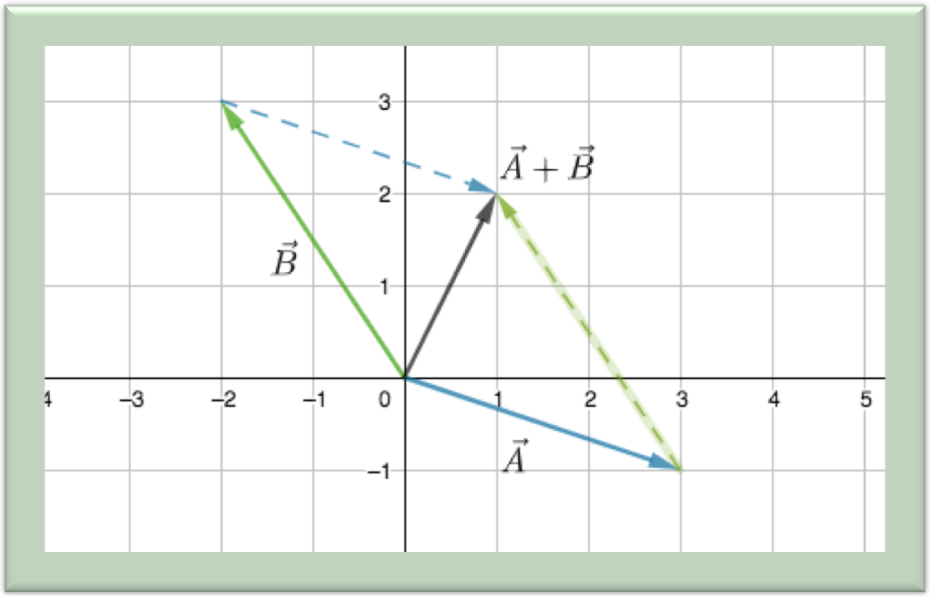
$$\overrightarrow{A} = \langle 3, -1 \rangle \; y \; \overrightarrow{B} = \langle -2,3 \rangle$$

$$\vec{A} + \vec{B}$$

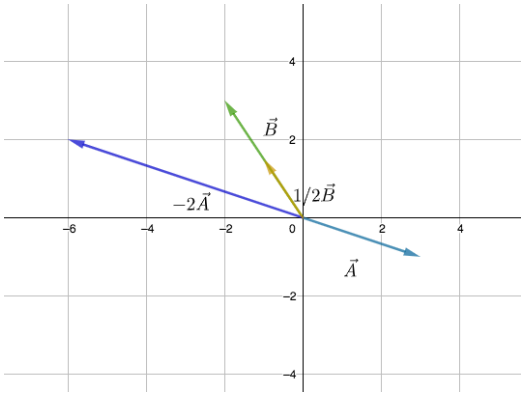

$\vec{B}$
$\vec{A}$

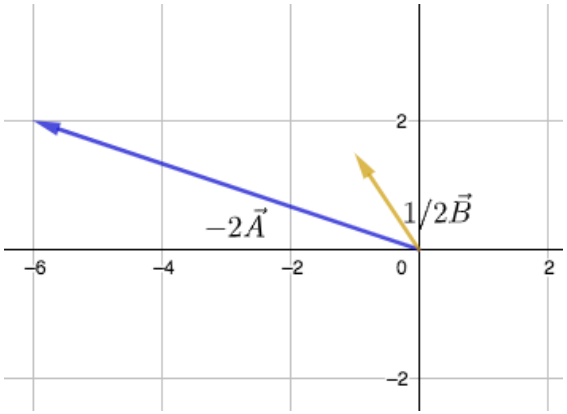

$\vec{B}$
$\vec{A}$

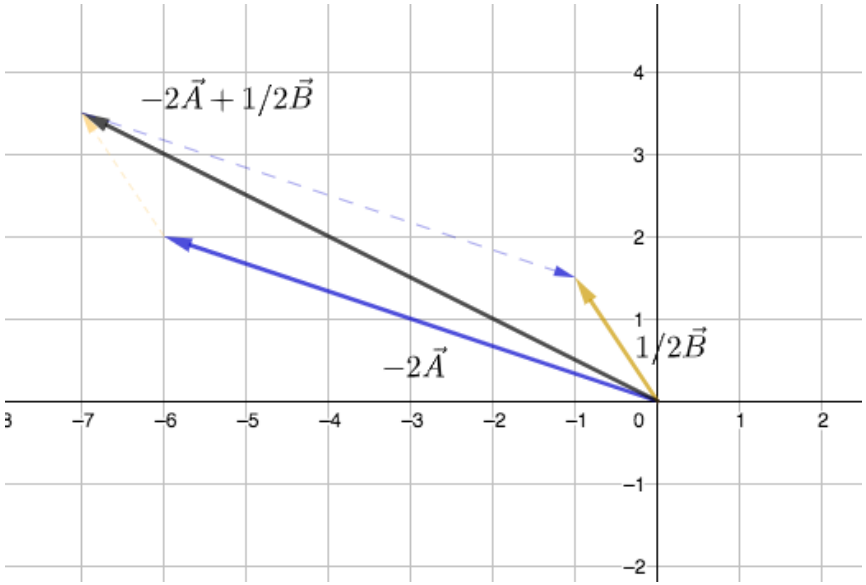

$\vec{B}$
$\vec{A}$


$\vec{A}+\vec{B}$
$\vec{B}$
$\vec{A}$

Hallar gráficamente. $-2\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}$ Si $\overrightarrow{A} = \langle 3, -1 \rangle$ y $\overrightarrow{B} = \langle -2,3 \rangle$





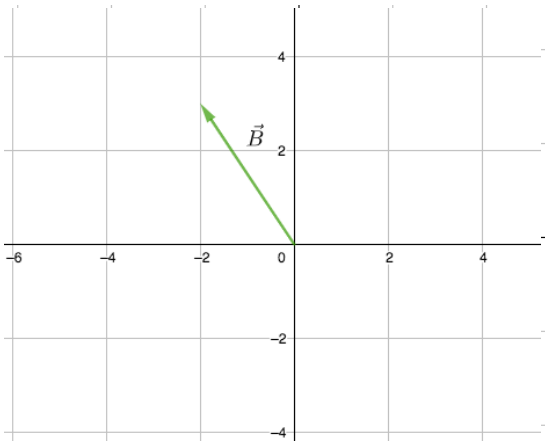


Vector unitario: vector de módulo 1

Si $\lambda = \frac{1}{|\vec{A}|}$ entonces el vector $\lambda\vec{A} = \langle \lambda a_1, \lambda a_2 \rangle$, será un vector de módulo unidad y de la misma dirección y sentido que $\vec{A}$ llamado **vector unitario** o **versor**.

Si $\lambda = -\frac{1}{|\vec{A}|}$ entonces el vector $\lambda\vec{A}$ *será un vector de módulo* 1, *la misma dirección* que $\vec{A}$ pero sentido distinto.

Hallar vectores unitarios con $\overrightarrow{B} = \langle -2,3 \rangle$



Primero calculo el módulo de $\overrightarrow{B}$

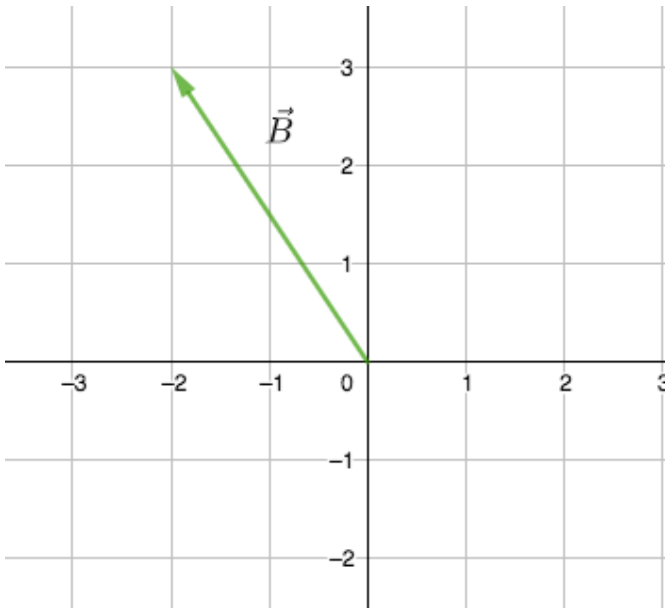
$$|\overrightarrow{B}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

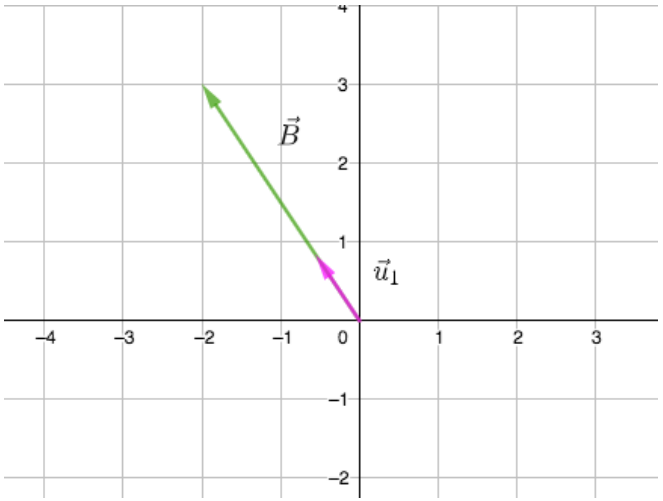
Los vectores unitarios con $\overrightarrow{B}$ son

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\sqrt{13}} \langle -2,3 \rangle = \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$

$$\overrightarrow{u_2} = -\frac{1}{\sqrt{13}} \langle -2,3 \rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$

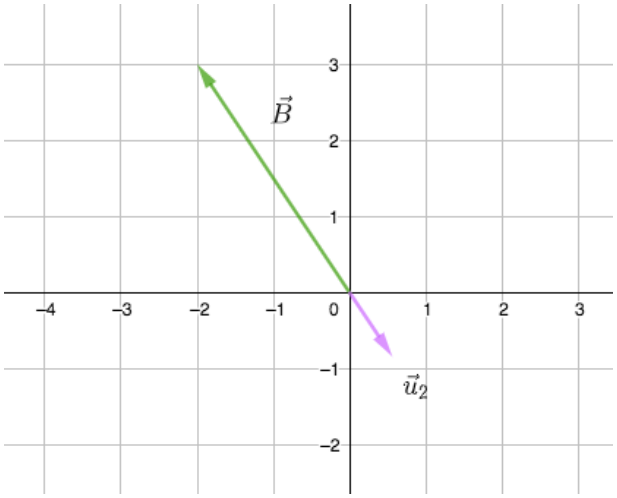
$$|\overrightarrow{u_1}| = \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{13} + \frac{9}{13}} = \sqrt{\frac{13}{13}} = 1$$





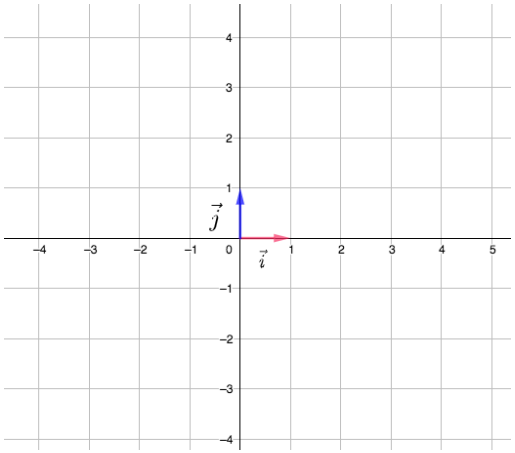
$$\overrightarrow{u_1} = \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$

$$\overrightarrow{u_2} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$



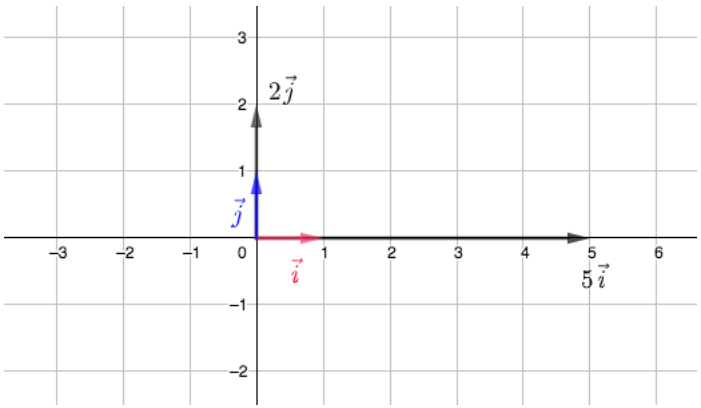
Versores fundamentales:

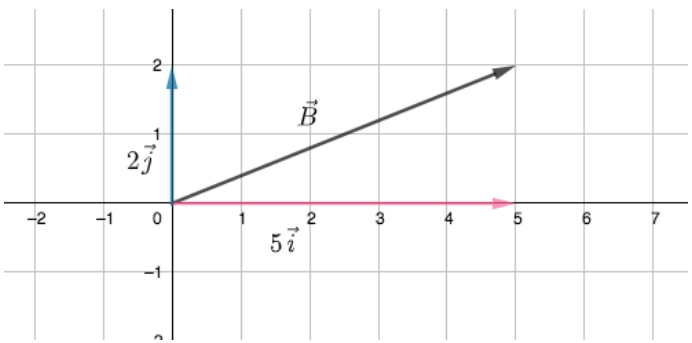
$$\vec{i} = \langle 1, 0 \rangle$$
$$\vec{j} = \langle 0, 1 \rangle$$



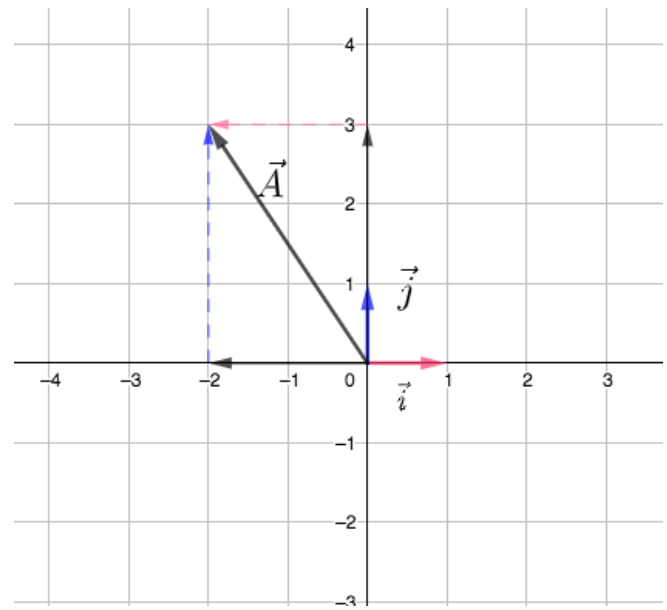
$$\vec{A} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} = \langle a_1, a_2 \rangle$$

$$\vec{B} = 5\,\vec{i} + 2\,\vec{j} = \langle 5, 2 \rangle$$





$$\vec{A} = \langle -2, 3 \rangle = -2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$$



Algunas indicaciones para el ejercicio 6(ej. De profundización)

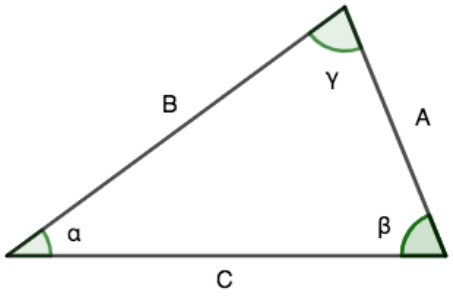
Cómo hallar el ángulo entre dos vectores, usando el teorema del coseno:

Teorema del coseno: Dado un triángulo de lados A B C y ángulos α β γ, donde α es el ángulo opuesto a A, β es el ángulo opuesto a B y γ es el ángulo opuesto a C, se tiene:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos\alpha$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC \cos\beta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos\gamma$$

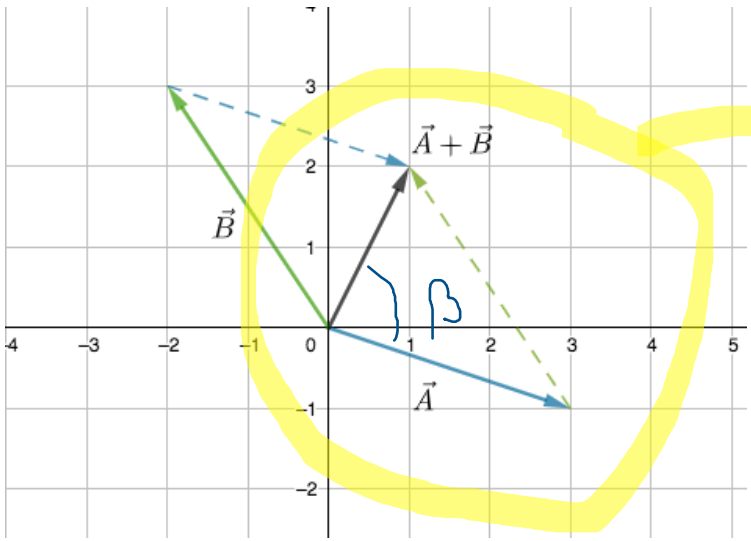


Dados $\overrightarrow{A} = \langle 3, -1 \rangle$ y $\overrightarrow{B} = \langle -2,3 \rangle$

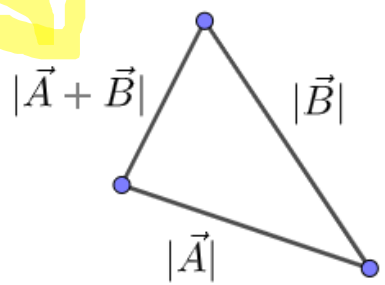
Hallar el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{A} + \vec{B}$

Analíticamente: $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \langle 1,2 \rangle$

Gráficamente:

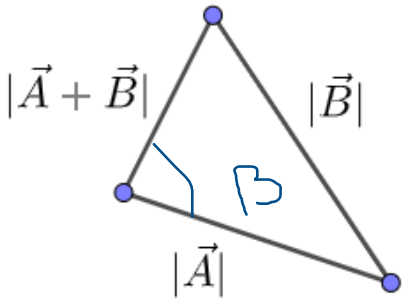


Para hallar el ángulo entre $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{A} + \vec{B}$, uso el triángulo, cuyos lados valen:



Aplicamos el teorema del coseno al triángulo:

$$|\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{A}+\vec{B}|^2 - 2\,|\vec{A}||\vec{A}+\vec{B}|\cos(\beta)$$



$13 = 10 + 5 - 2.\sqrt{10}.\sqrt{5}.\cos(\beta)$

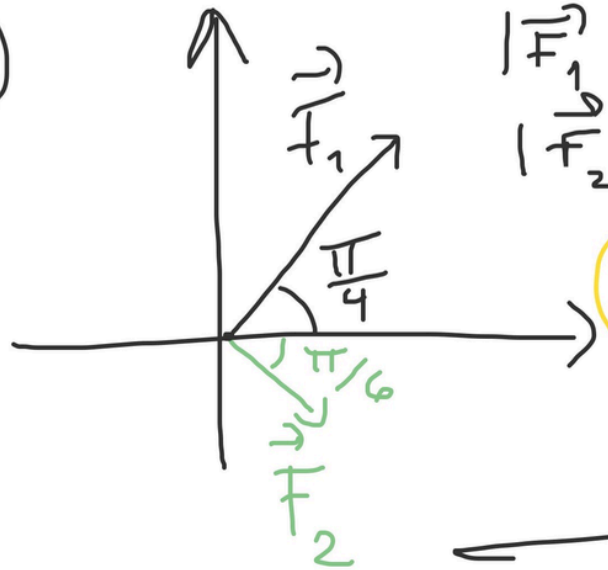
$-2 = -2.\ .\sqrt{10}.\sqrt{5}.\cos(\beta)$

$\frac{1}{\sqrt{50}} = \cos(\beta)$

$\beta \cong 81.8º$

Consultas hechas en clase:

9)

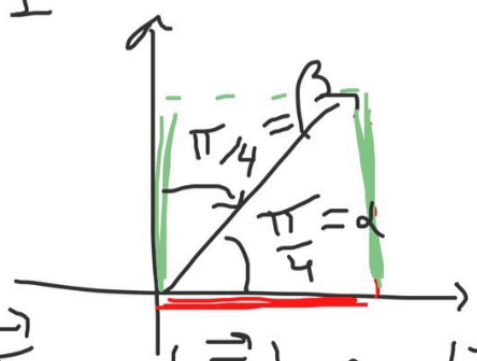


$|\vec{F}_1| = 20\ kg$

$|\vec{F}_2| = 16\ kg$

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$\vec{F}_1 \longrightarrow |\vec{F}_1| = 20\ kg$



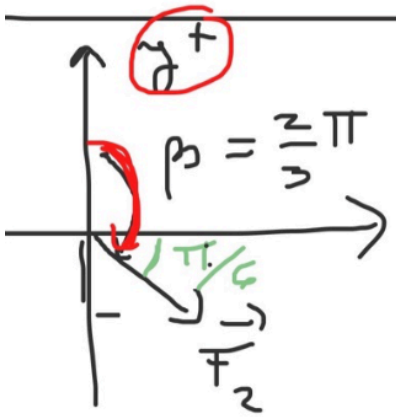
$\vec{F}_1 = \langle \quad , \quad \rangle$

$\vec{F}_{1_x} = |\vec{F}_1| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\vec{F}_{1_y} = |\vec{F}_1| \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\vec{F}_1 = \langle 10\sqrt{2}, 10\sqrt{2} \rangle$$

$$\frac{\cancel{120}^{2}}{\cancel{18}_{3}}\pi$$



$$\begin{cases} F_{2x} = \overset{16}{|\vec{F}_2|} \cdot \cos \overset{\pi/6}{\alpha} \\ F_{2y} = \overset{16}{|\vec{F}_2|} \cos \overset{2/3\,\pi}{\beta} \end{cases}$$

$$F_{2x} = \overset{8}{\cancel{16}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 8\sqrt{3}$$

$$F_{2x} = 8\sqrt{3}$$

$$F_{2y} = 16 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -8$$

$$\vec{F}_2 = \langle 8\sqrt{3}, -8 \rangle$$

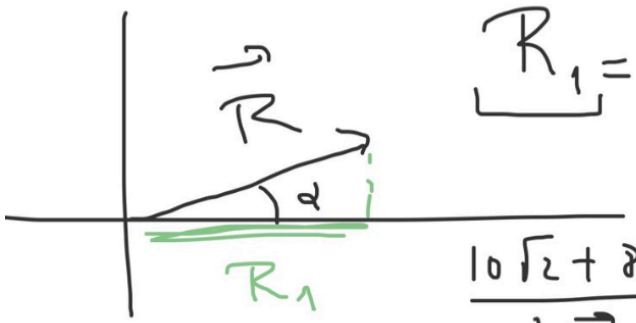
$$\vec{F}_1 = \langle 10\sqrt{2}, 10\sqrt{2} \rangle \qquad \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_2 = \langle 8\sqrt{3}, -8 \rangle$$

$$\vec{R} = \langle 10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}, 10\sqrt{2} - 8 \rangle$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{(10\sqrt{2} + 8\sqrt{3})^2 + (10\sqrt{2} - 8)^2}$$

$$\vec{R} = \langle 10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}, 10\sqrt{2} - 8 \rangle$$



$$R_1 = |\vec{R}| \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}}{|\vec{R}|} = \cos\alpha$$

Capítulo 7 Ej. 4

$$g: \begin{cases} 2x - 3y + z = 8 \\ -7x + 2y - z = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -7 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$g^*: \begin{cases} 2x - 3y = 8 - z \\ -7x + 2y = 1 + z \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad B = \begin{pmatrix} 8-z \\ 1+z \end{pmatrix}_{2\times 1} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 21 = -17 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8-z & -3 \\ 1+z & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2(8-z) - (-3)\cdot(1+z)}{-17} = \frac{16 - 2z + 3 + 3z}{-17} = \frac{19+z}{-17}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8-z \\ -7 & 1+z \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2(1+z) - (-7)(8-z)}{-17} = \frac{2 + 2z + 56 - 7z}{-17} = \frac{58 - 5z}{-17}$$

$$\text{Sol}: \left(-\frac{19}{17} - \frac{z}{17} ; -\frac{58}{17} + \frac{5}{17} z ; z \right) ; \quad \begin{cases} x = -19/17 - z/17 \\ y = -58/17 + 5/17\, z \\ z = z \end{cases}$$

- Para la semana que viene:

  Completar loe ejercicios del capítulo 8

  Mirar el material (libro y ejemplos subidos al aula virtual) .

  Traer inquietudes del capítulo 8 y de los capítulos anteriores.

- Si tenés alguna pregunta durante la semana hacé tu consulta en el Foro del Aula Virtual.