Matemática

Semana 01/06
Encuentro 10

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

Seguí las actualizaciones en el aula virtual ¡!

02/06 al 05/06	Capítulo 7.Sistema de ecuaciones lineales. (primera parte)

Ejercicios recomendados	**Ejercicios de profundización**
1,2,3,5,7,8,9,10,12	4,6,11,13,14

• Indicaciones generales.

Capítulo 7. Sistema de ecuaciones lineales.

Material disponible en:

Libro
Aula virtual

• Actividades

Ejemplos y preguntas para pensar

Consultas

Libro

Material disponible en el Libro

Capítulo 7. Sistema de ecuaciones lineales.

7. 1 Introducción pp.83-87

7.1.1.Sistemas y Matrices

Notación Matricial

Rango de una matriz

7.2. Existencia de soluciones pp.87-88

7.2.1. Teorema de **Rouché-Frobenius**

7.2.2. **Corolarios**

Ejercicios recomendados

1,2,3,5,7,8,9,10,12

Ejercicio correspondiente a capítulo 7 (primera parte)

Ejercicios de profundización

4,6,11,13,14

Aula virtual

Material disponible en el Aula Virtual

Capítulo 7 (primera parte)

Ejemplos de cálculo del rango de una matriz

Actividades

Rango de una matriz (como lo hallamos)

- Dada una matriz podemos extraer submatrices a partir de ella, nos van a interesar las submatrices cuadradas.

- Empezamos con las submatrices cuadradas de orden mayor que se puedan extarer.

Analizamos el determinante de dichas submatrices.
Si alguno de los determinantes es distinto de cero el rango de la matriz será el orden de dicha sumatriz.
Si todos los determinantes son igual a cero, hay que analizar los determinantes de submatrices de orden menor y repetir procedimiento.

Ejemplos del libro
(pp. 86)

- podemos extraer submatrices a partir de ella, nos van a interesar las submatrices cuadradas.

A no es cuadrada

1. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

submatrices cuadradas de orden mayor

Consideremos las tres submatrices de 2×2 de A:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

No hace falta calcular estos det

El determinante de la primera submatriz es 10. Como es distinto de cero, esto basta para decir que $rango(A) = 2$ (no hace falta calcular los demás determinantes).

Si alguno de los determinantes es distinto de cero el rango de la matriz será el orden de dicha sumatriz.

El rango de A es 2

El rango de A es 2, dado que A es de 2x3 y tiene una submatriz de 2x2 cuyo determinante es distinto de 0

Ejemplos del libro
(pp. 87)

podemos extraer submatrices a partir de ella,
nos van a interesar las submatrices cuadradas.

A no es cuadrada

2. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -10 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Consideremos las tres submatrices de 2×2 de A:

submatrices cuadradas de orden mayor

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -10 & -8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$$

Los determinantes de las tres submatrices valen cero. Tomemos las submatrices de 1×1, cualquiera de ellas tiene determinante distinto de cero, esto basta para decir que $rango(A) = 1$ (notar que una matriz tiene rango cero si, y solamente si, es la matriz nula).

Si todos los determinantes son igual a cero, hay que analizar los determinantes de submatrices de orden menor y repetir procedimiento.

El rango de A es 1

El rango de A es 1 porque **todas** las submatrices de 2x2 de A tienen det=0 Y contiene una sumatriz de 1x1 con det distinto de 0

https://ekuatio.com/que-es-y-como-calcular-el-rango-de-una-matriz-por-determinantes/ (En esta página hay varios ejemplos que pueden ser de utilidad)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

A matriz de 3x4

Busco una submatriz de 3x3

$$A=\begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \end{matrix}}}^{A_1} & \begin{matrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Calculo su determinante $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -8$ como es distinto de cero

El rango de A es 3

El rango de A es 3 porque es una matriz de 3x4 que contiene una submatriz A_1 cuyo determinante es distinto de 0.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

A matriz de 4x4

La mayor submatriz cuadrada que podemos elegir es la misma matriz, por lo que empezamos calculando su determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}=49$$

$$|A|=49\neq 0 \Rightarrow Rag\ A=4$$

El rango de A es 4

El rango de A es 4 porque es una matriz cuadrada de 4x4 cuyo determinante es distinto de 0. (A es una submatriz de ella misma)

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

B matriz de 4x4

$$|B|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

El rango de B no es 4

B1

$$B=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 4 & 2 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

B1 submatriz de B de 3x3

$$|B_1|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1 \qquad |B_1|=1\neq 0 \Rightarrow Rag\ B=3$$

El rango de B es 3

El rango de B es 3 porque es una matriz cuadrada de 4x4 con determinante igual a 0 y tiene una submatriz de 3x3 cuyo determinante es distinto de 0.

Sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = & b_2 \\ \quad \vdots & \quad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = & b_k \end{cases}$$

Llamaremos **solución del sistema** a todo conjunto de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que reemplazados en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ haga verdaderas las k ecuaciones **simultáneamente**. Nos interesa estudiar dos cuestiones, una se refiere a la existencia de estas soluciones y otra a los métodos para hallarlas.

- Solución del sistema
- Existencia de solución
- Métodos para hallarlas

Sistemas de ecuaciones lineales (notación matricial)

Ejemplos:

$$\begin{cases} 7x - 3y + 6z = 5, \\ 5x - 2y + 2z = 11, \\ 2x - 3y + 8z = 10. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \qquad \text{indep.}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -3 & 6 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}}_{B}$$

Matriz de los coeficientes

Matriz de los términos independientes

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{\begin{matrix} 7 & -3 & 6 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 8 \end{matrix}}_{A} & & & \begin{matrix} 5 \\ 11 \\ 10 \end{matrix} \end{array}\right)}_{A^*}$$

$A^* \longrightarrow$ Matriz ampliada

$$\begin{cases} 3a + 2b = 13, \\ 2a + 3b = 7 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 13 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 3x - 5y = 24, \\ -9x + 7y = 20, \\ -2x - 8y = 12. \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -9 & 7 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 24 \\ -9 & 7 & 20 \\ -2 & -8 & 12 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - y + z + 3t + v = 0 \\ 2x - z + 6v = 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

Solución de un sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = & b_k \end{cases}$$

Llamaremos solución del sistema a todo conjunto de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que reemplazados en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ haga verdaderas las k ecuaciones simultáneamente. Nos interesa estudiar dos cuestiones, una se refiere a la existencia de estas soluciones y otra a los métodos para hallarlas.

$$\begin{cases} 3a + 2b = 13, \\ 2a + 3b = 7 \end{cases}$$

¿Es (1,5) solución del sistema? ¿y (5,-1)?

$$\begin{cases} 3.1+2.5 \stackrel{?}{=} 13 \\ 2.1+3.5 \neq 7 \end{cases}$$

(1,5) no es solución

$$\begin{cases} 3.5+2.(-1) = 13 \\ 2.5+3.(-1) = 7 \end{cases}$$

(5,-1) es solución

Existencia de soluciones

Un sistema de ecuaciones lineales puede:

a) Tener solución y lo llamamos ***sistema compatible.***
   a.1 única solución, sistema compatible determinado.
   a.2. infinitas soluciones, sistema compatible indeterminado.

b) No tener solución y lo llamamos ***sistema incompatible.***

Corolarios del Teorema de Rouché-Frobenius:

Sea un sistema de k ecuaciones con n incógnitas, A la matriz y A^* la matriz ampliada del mismo, entonces:

Solución única

1. Si $rango(A) = rango(A^*) = n$ el sistema tiene solución única. Se dice también que el sistema es compatible determinado.

Infinitas soluciones

2. Si $rango(A) = rango(A^*) < n$ el sistema tiene infinitas soluciones. Se dice también que el sistema es compatible indeterminado.

Sin solución

3. Si $rango(A) \neq rango(A^*)$ el sistema no tiene solución. Se dice también que el sistema es incompatible.

Ejercicio 1 (Vamos a usar los corolarios del Terorema de Rouché-Frobenius)

1) a) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 5x + 5y = 1 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 8 \\ 5 & 5 & 1 \end{array}\right)$

$$\overbrace{\left(\underbrace{\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 5 & 5 \end{array}}_{A} \middle| \begin{array}{c} 8 \\ 1 \end{array}\right)}^{A^*}$$

Rango de A:

A es una matriz cuadrada de 2x2, calculo el determinante de A

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 10-(-15)=25 \neq 0$ Por lo tanto, el rang(A)=2

Rango de A^*:

A^* es una matriz de 2x3.(Hay que analizar submatrices de 2x2 de A^*).

A es una submatriz y tiene determinante $\neq 0$ con lo cual rang(A^*)=2

Para analizar la existencia de soluciones o no del sistema:

- número de incógnitas → n=2
- rang(A)=2
- rang(A^*)=2

Sistema compatible determinado

Sistema compatible, tiene solución

1. Si $rango(A) = rango(A^*) = n$ el sistema tiene solución única. Se dice también que el sistema es compatible determinado.
2. Si $rango(A) = rango(A^*) < n$ el sistema tiene infinitas soluciones. Se dice también que el sistema es compatible indeterminado.
3. Si $rango(A) \neq rango(A^*)$ el sistema no tiene solución. Se dice también que el sistema es incompatible.

El sistema tiene solución y es única, dado que es un sistema compatible determinado

Consultas:
Ejercicio 1e)

1)e) $\begin{cases} 2t_3 - 3t_4 = 6 \\ t_1 - 4t_4 = 8 \\ t_1 - t_2 = 2 \\ t_2 - 3t_3 = 4 \end{cases}$

$$A^* = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right)}_{A^*} \quad A$$

¿rango A? ¿rango A^*?

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{0\,(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{0\,(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} + 2 \cdot \underbrace{(-1)^{1+3}}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-3)(-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) + (-3)(-1) \cdot 3 = -8 + 9 = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \underbrace{(-1)^{1+3}}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdot 1 = \boxed{-4} \; ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \underbrace{(-1)^{3+3}}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) = 3$$

$\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{rango } A = 4}$

A es una submatriz de 4x4 de A^* y $\det A \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{rango } A^* = 4}$

rango A = rango A^* = 4 = nº de incognitas

$\therefore$ El sistema tiene 1 sola solución (es compatible determinado)

- Esta página puede ser de utilidad para comprobar las respuestas de este capítulo
http://es.onlinemschool.com/

- Para la semana que viene:
Completar el ejercicio 1 del capítulo 7.
Mirar el material (libro y ejemplos subidos al aula virtual) .
Traer inquietudes sobre capítulo 7 (primera parte) o de los capítulos anteriores.

- Si tenés alguna pregunta durante la semana hacé tu consulta en el Foro del Aula Virtual.