# Matemática

Semana 14/09
Encuentro 23

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

# Cronograma

Seguí las actualizaciones en el aula virtual ¡!

| | |
|---|---|
| 14/9 al 18/09 | **12. Límite y Continuidad** |

**Usamos una nueva versión de la Guía Teórico Práctica**

# Aula virtual

Material disponible en el Aula Virtual

- **Nueva versión del Libro**. Lo vas a encontrar en la pestaña ACTIVIDADES PARA EL CURSO

Libro de cátedra para la segunda parte con algunas modificaciones lo iremos subiendo aquí. Los capítulos que faltan se van a ir agregando.

Libro (clic aquí)

- **Material adicional:**

Capítulo 12 limites indeterminados (clic aquí)
Capítulo 12 limites laterales-infinitos (clic aquí)

# Libro 2020- Parte 2

## Capítulo 12. Limite y Continuidad

12.1 **Limite** pp.35-41

- 12.1.1. Definición
- 12.1.2. Limites Laterales
- 12.1.3 Limites cuando la variable tiende a infinito.
- 12.1.4. Limites cuando la función tiende a infinito
- 12.1.5. Propiedades.
- 12.1.6. Limites indeterminados.

12.2 **Funciones Continuas** pp.42-46

- 12.2.1. Definición
- 12.2.2. Propiedades
- 12.2.3. Funciones continuas en un punto
- 12.2.4. Redefinición de una función en un intervalo.

12.3. Ejercicios pp 47

Limites( 1-8) Continuidad(9-10) Problemas (11-12)

# Actividades

1-4

1. ⊗ ⊙ Dada la función:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 1 \\ \\ x+1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Graficarla. Representar en el gráfico: $g(0)$, $g(0{,}5)$, $g(0{,}8)$, $g(0{,}9)$, $g(0{,}95)$, $g(0{,}99)$. Observar a que valor se acerca $g(x)$ cuando $x$ se acerca a 1 por valores menores que 1.

https://www.geogebra.org/m/qyv2232w

Geogebra Notas

5. ⊗ ⊙ Estudiar si existe $\lim_{t \to 0} f(t)$ y graficar:

$$\text{d) } f_4(t) = \begin{cases} -t & \text{si } t \leq 0 \\ t^2 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

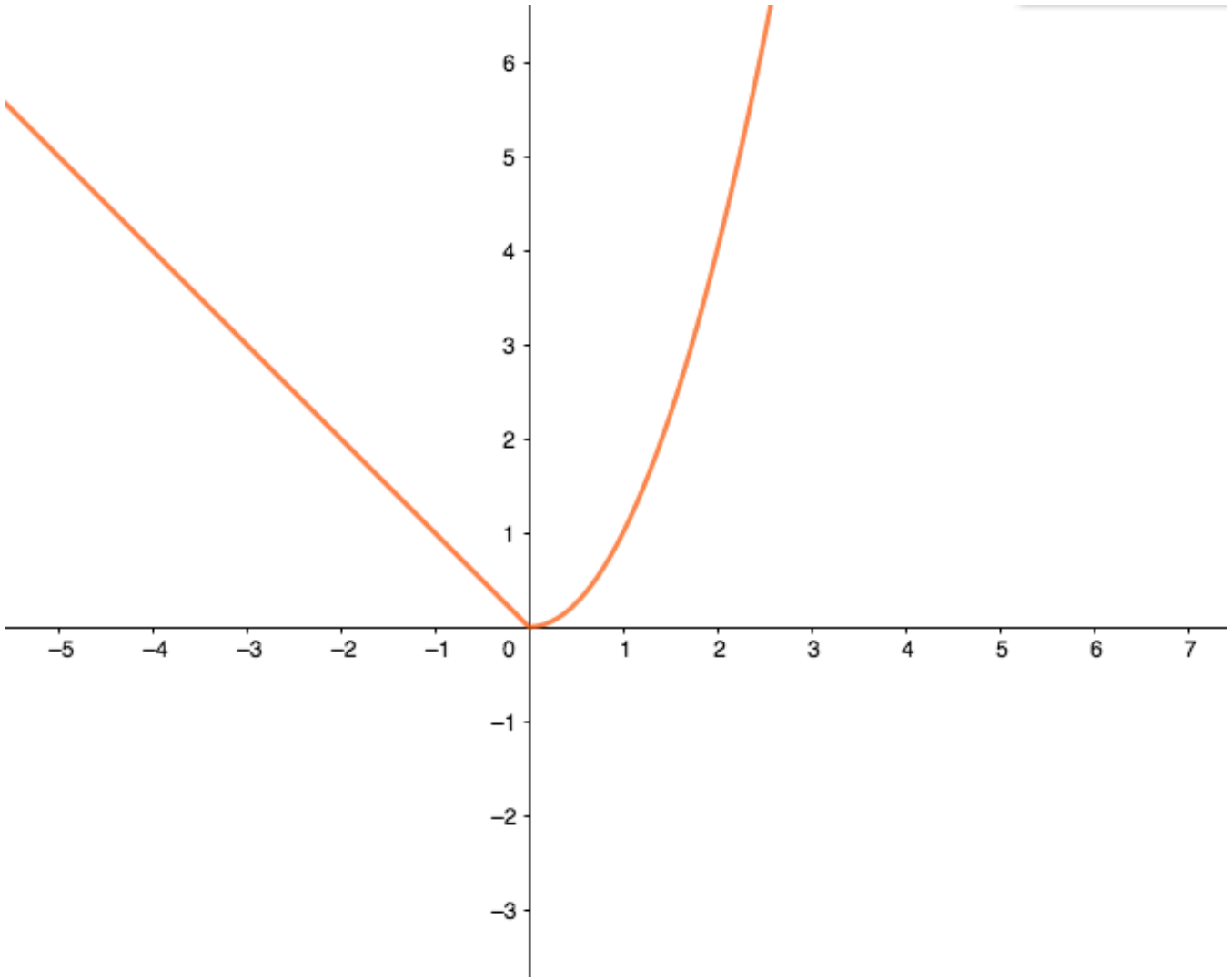
1) Analizo los límites laterales en 0 (¿¿por qué??)

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} f_4(t) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} t^2 = 0^2 = 0$$

$$\lim_{t \longrightarrow 0^-} f_4(t) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} (-t) = (-0) = 0$$

2) Indico si existe el lim

$$\lim_{t \longrightarrow 0^-} f_4(t) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} f_4(t) \; entonces \; \lim_{t \longrightarrow 0} f_4(t) = 0$$


6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7

6. ⊗ ⊙ Estudiar si existen los siguientes límites, en cada caso realizar un gráfico:

1) $\lim_{x \to 2} f(x)$

b) $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 9 & \text{si } x \geq 2 \\ 2x & \text{si } x < 2 \end{cases}$

- $\lim_{x \to 2} f(x)$ ¿Debo hacer límites laterales? SI

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} -2x^2 + 9 = -2.2^2 + 9 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 2x = 4$$

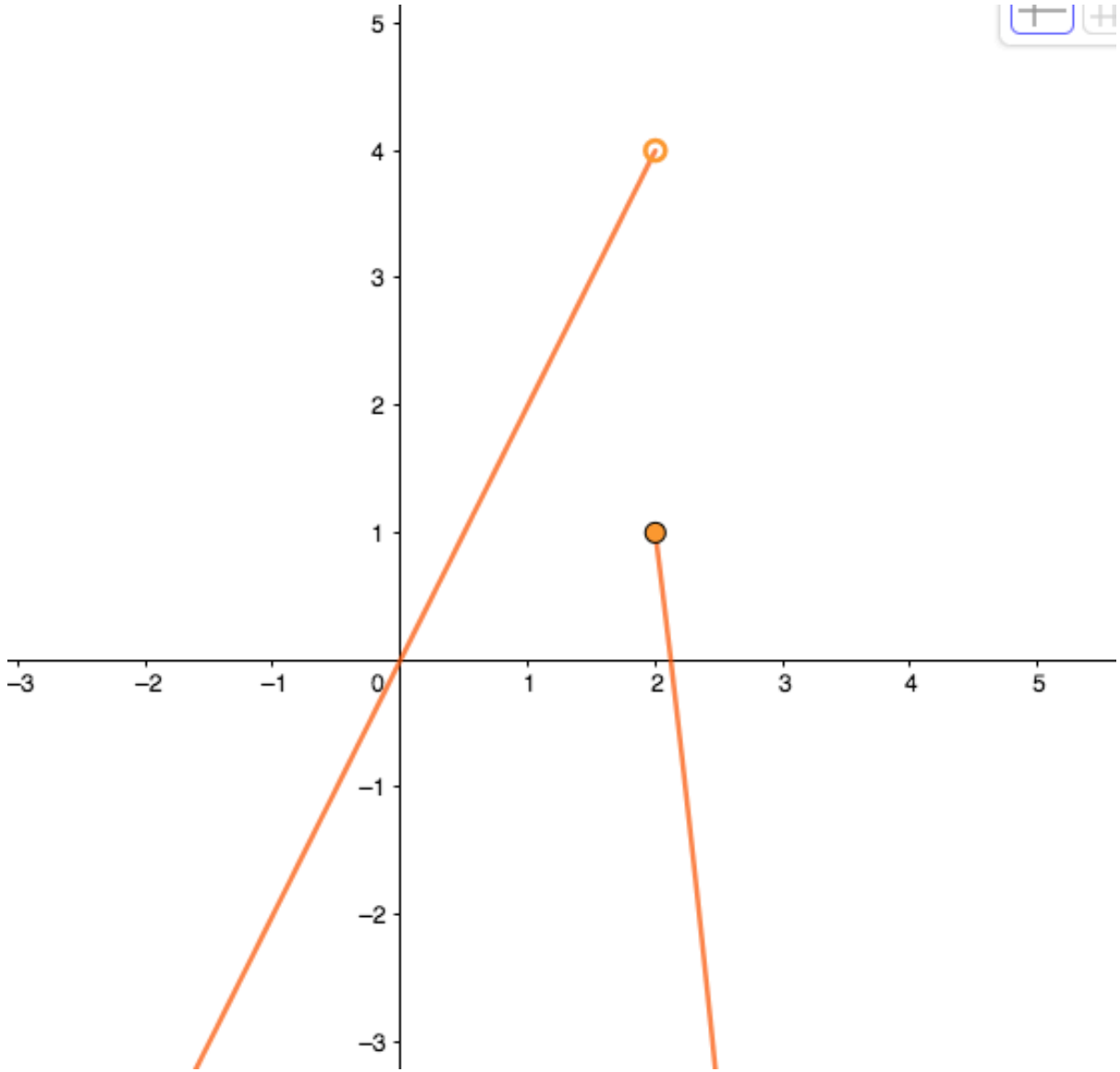
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

$\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe

---

- $\lim_{x \to -3} f(x)$ ¿Debo hacer límites laterales? NO

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} 2x = -6$$


5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
1
2
3
4
5

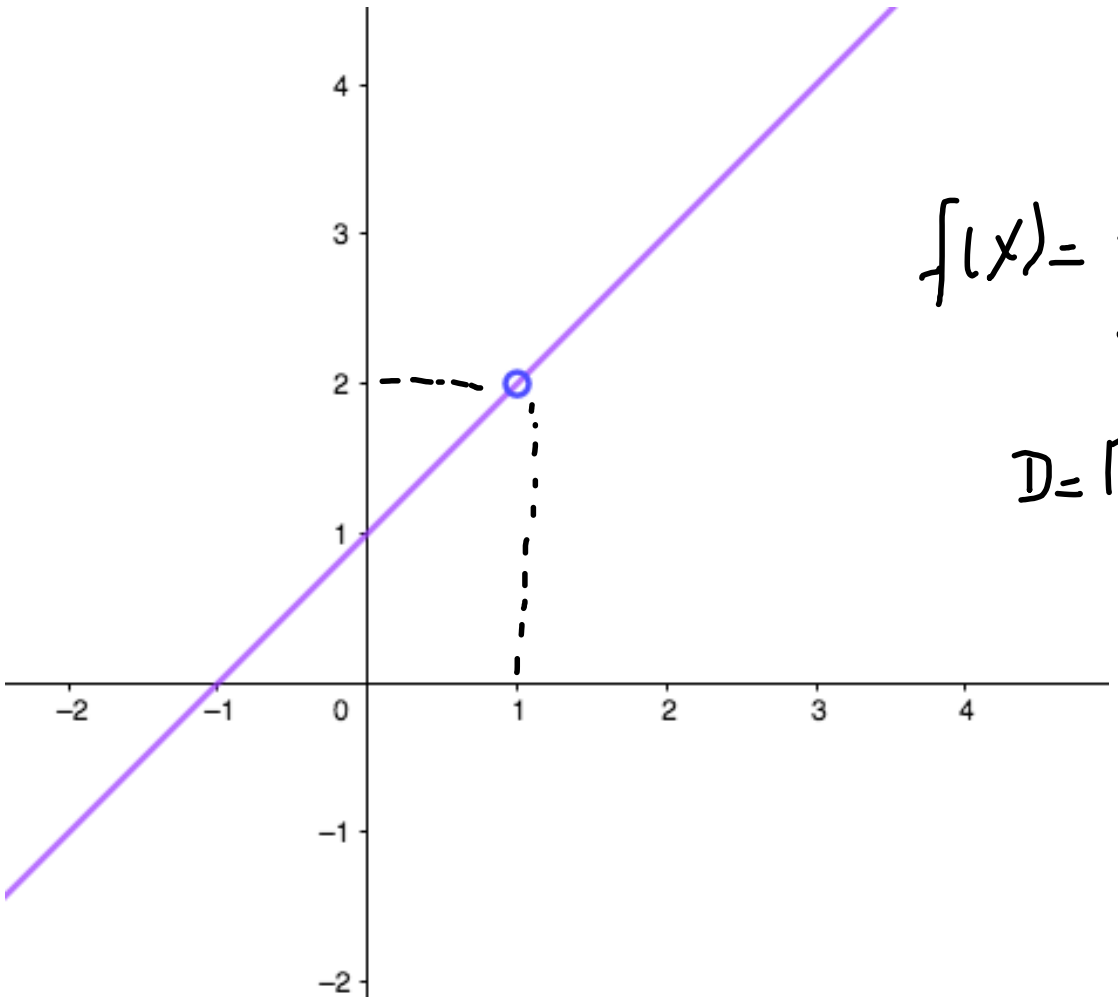
7. ⊗ ⊙ Calcular los límites siguientes: d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} x^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0 \qquad \lim_{x\longrightarrow 1} x - 1 = 1 - 1 = 0$$

Entonces $\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ *es indeterminado.*

Vamos a usar FACTORIZACIÓN para determinar el límite

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\longrightarrow 1} (x+1) = 2$$




$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$D = \mathbb{R} - \{1\}$$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

Vemos que el lim de numerador y el denominador es cero, por lo tanto el lim Es indeterminado

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

$(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}-1) = (\sqrt{x})^2 - 1^2 = x-1$

Vamos a usar RACIONALIZACIÓN para determinar el límite

$0/0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x.(\sqrt{4+x}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{4+x})^2+2\sqrt{4+x}-2\sqrt{4+x}-4)}{x.(\sqrt{4+x}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{4+x-4}{x.(\sqrt{4+x}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x.(\sqrt{4+x}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$$

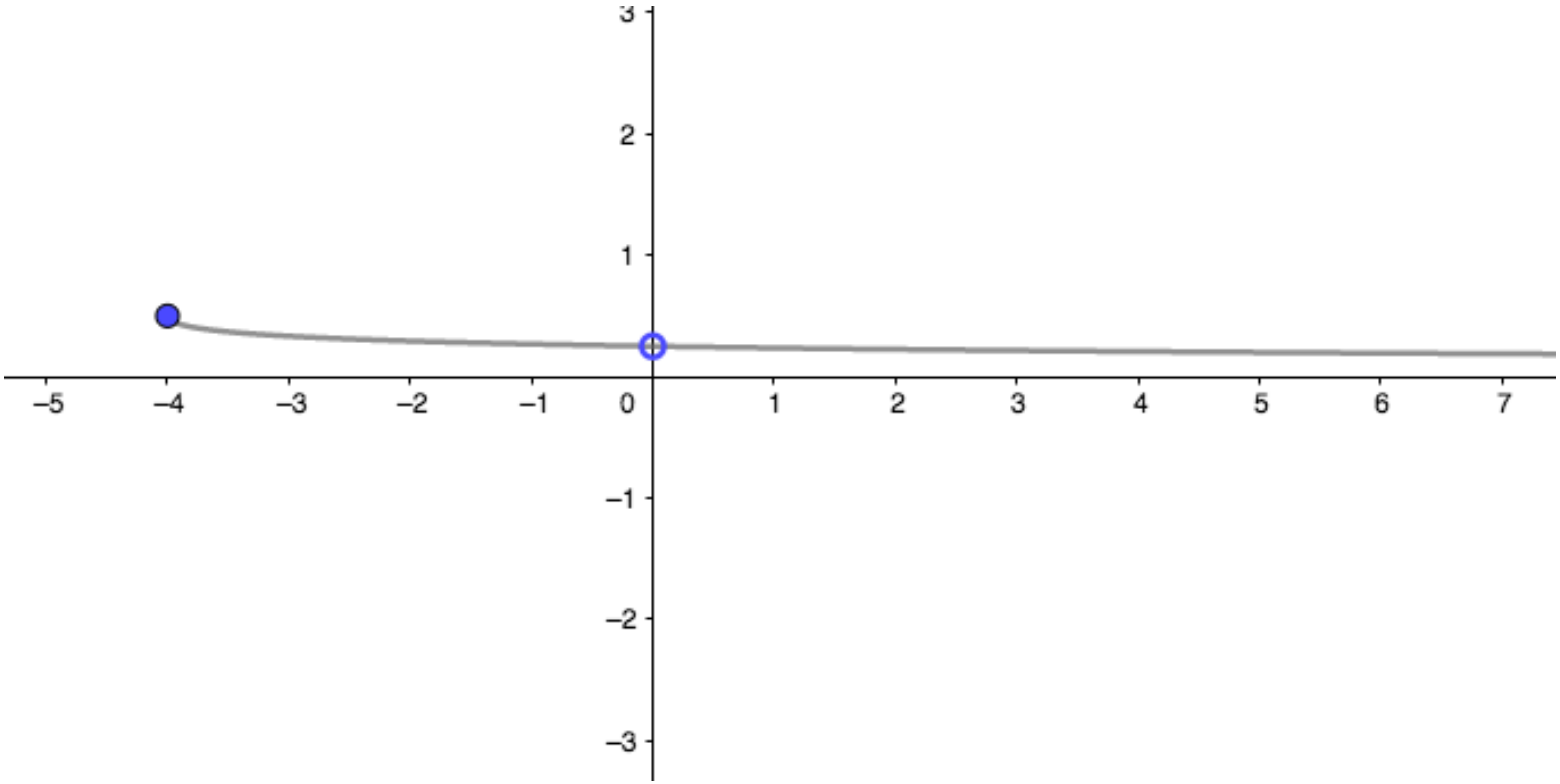
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}\right)}{h} \frac{\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{a+h}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2}{h \cdot \left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{a} + h - \cancel{a}}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{a}}}$$

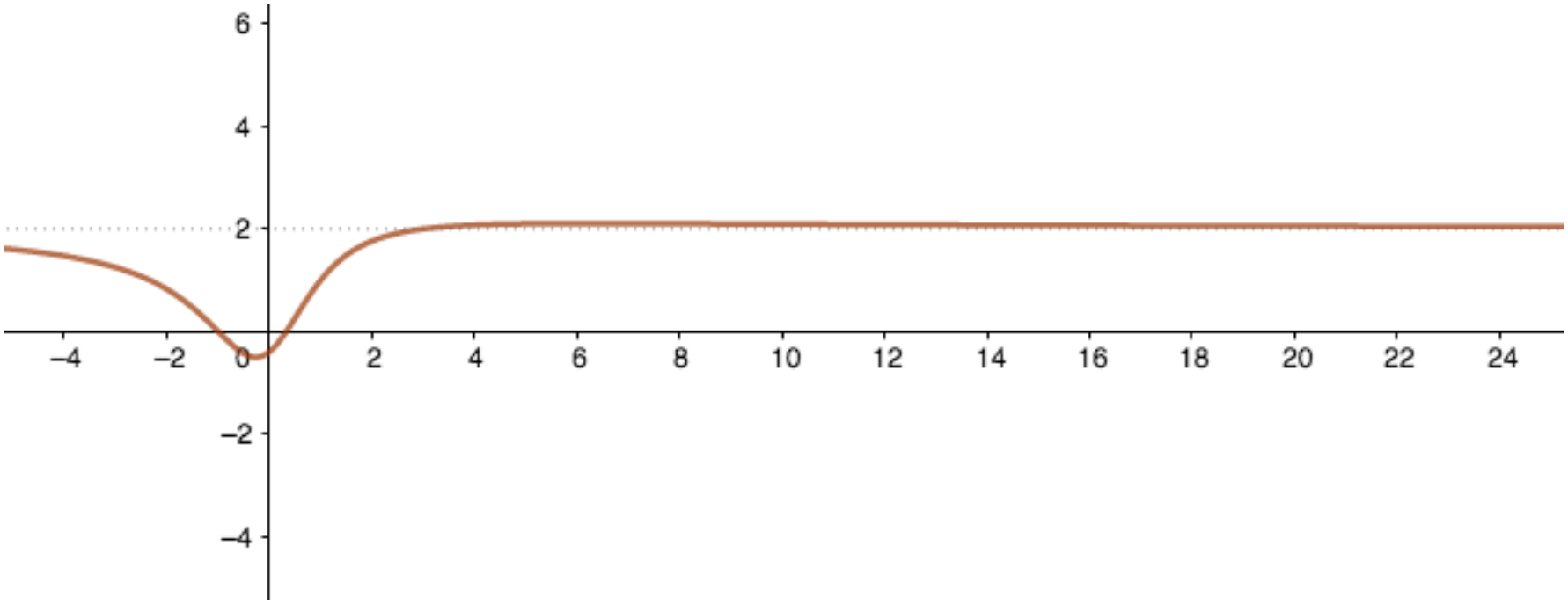

3
2
1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
−1
−2
−3

8. ⊗ ⊙ Calcular, si existen, los siguientes límites:

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6x^2 + 4x - 2}{3x^2 + 5}$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{6x^2 + 4x - 2}{3x^2 + 5} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2\,(6 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2})}{x^2(3 + \frac{5}{x^2})} =$$

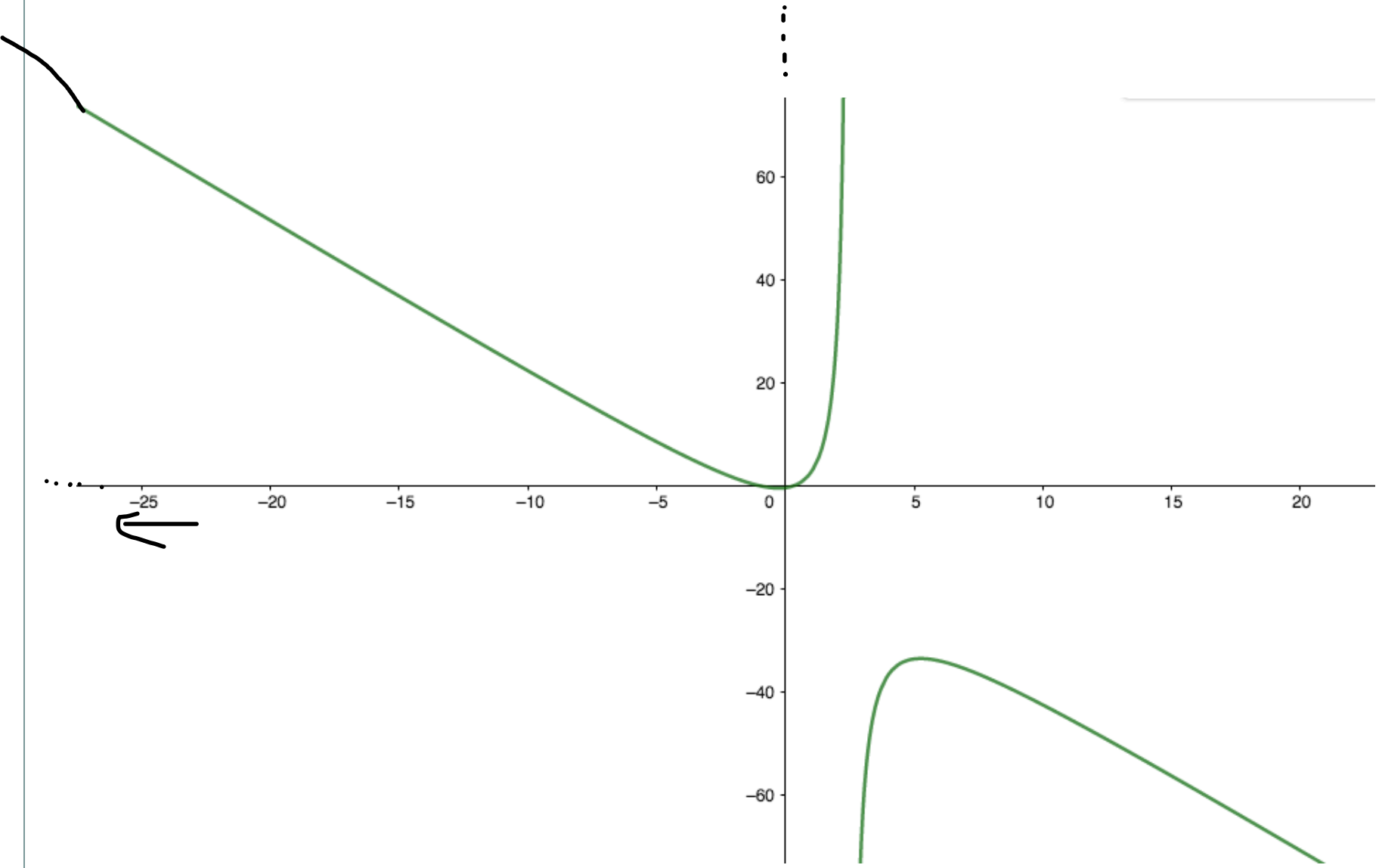
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{(6 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2})}{(3 + \frac{5}{x^2})} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{6}{3} = 2$$


6
4
2
−2
−4
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24

Ejemplos:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{6x^2 + 4x - 2}{-2x + 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \left(6 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{x\left(-2 + \frac{5}{x}\right)} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x \ \left(6 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\left(-2 + \frac{5}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x \ .6}{-2} = \lim_{x \to -\infty} -3\,x = +\infty$$

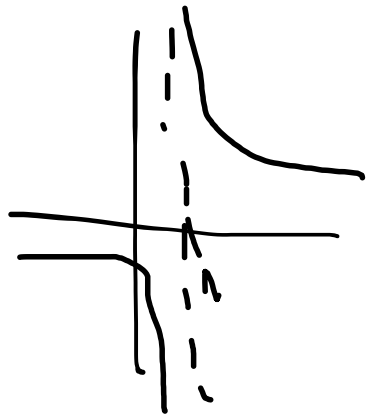

60
40
20
−20
−40
−60
−25
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20

f) $\lim\limits_{t \to -1} \dfrac{2}{(t+1)^4}$

$y = \dfrac{3}{x-1}$

$\lim\limits_{t \to -1^+} (t+1)^4 = 0^+$

$\lim\limits_{t \to -1^-} (t+1)^4 = 0^+$



$\lim\limits_{t \to -1^+} \dfrac{2}{(t+1)^4} = +\infty$

$\lim\limits_{t \to -1^-} \dfrac{2}{(t+1)^4} = +\infty$

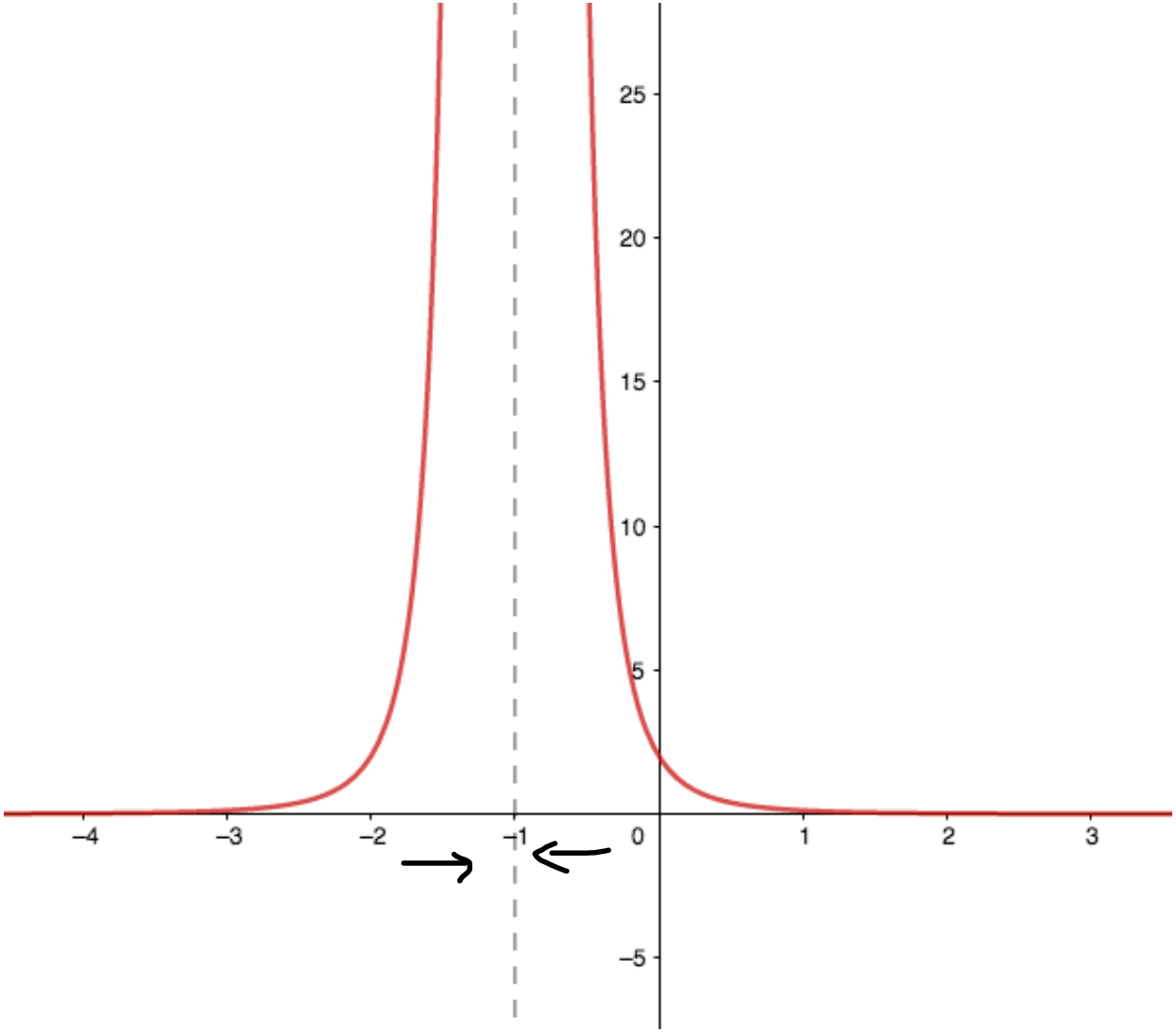
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \overbrace{x-1}^{0^+} = 0^+$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \overbrace{x-1}^{0^-} = 0^-$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3}{x-1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3}{\underbrace{x-1}_{\to 0^-}} = -\infty$


25
20
15
10
5
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

Para la semana que viene:

- Completar los ejercicios del capítulo 12 (limite del 1 al 8)

Si tenés alguna pregunta durante la semana hacé tu consulta en el Foro del Aula Virtual.

# Matemática

Semana 21/09
Encuentro 24

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

# Cronograma

Seguí las actualizaciones en el aula virtual ¡!

| | |
|---|---|
| 21/9 al 25/09 | **12. Límite y Continuidad** |

**Usamos una nueva versión de la Guía Teórico Práctica**

# Aula virtual

Material disponible en el Aula Virtual

- **Nueva versión del Libro**. Lo vas a encontrar en la pestaña ACTIVIDADES PARA EL CURSO

Libro de cátedra para la segunda parte con algunas modificaciones lo iremos subiendo aquí. Los capítulos que faltan se van a ir agregando.

Libro (clic aquí)

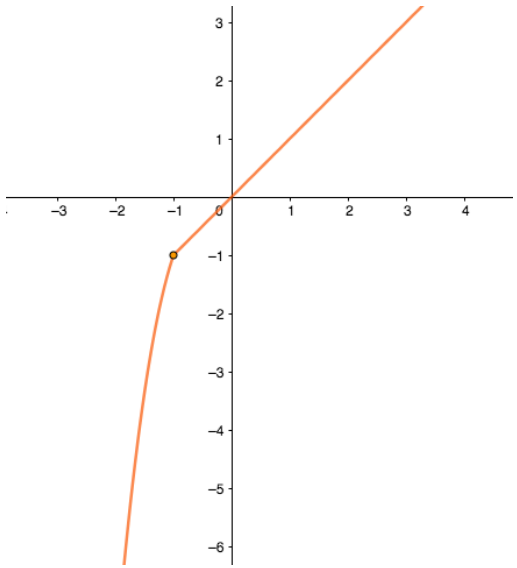
- **Material adicional:**

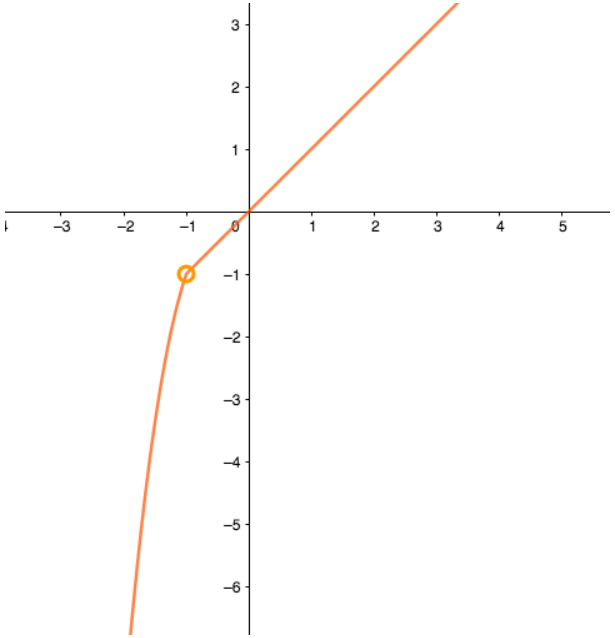
Capítulo 12 limites indeterminados (clic aquí)
Capítulo 12 limites laterales-infinitos (clic aquí)

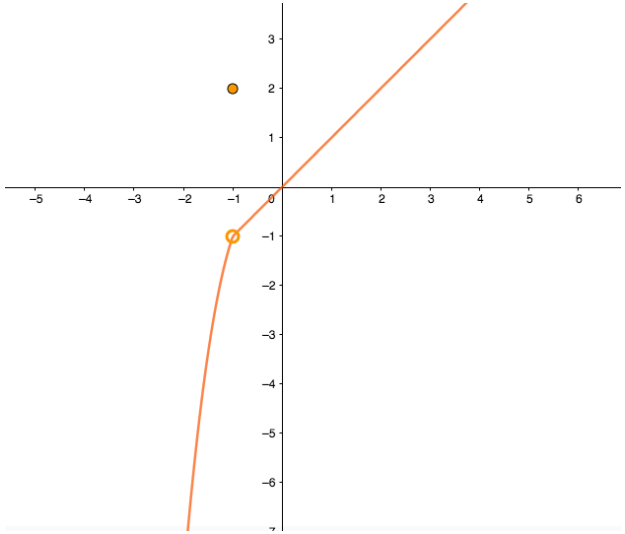
# Libro 2020- Parte 2

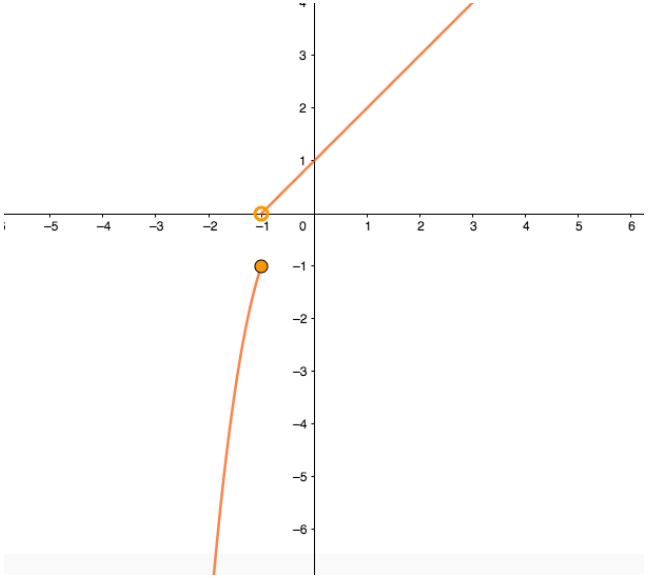
## Capítulo 12. Limite y Continuidad

¿Cuál o cuáles de las siguientes funciones son continuas en $x=-1$?


3
2
1
−3 −2 −1 0 1 2 3 4
−1
−2
−3
−4
−5
−6


3
2
1
−3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
−1
−2
−3
−4
−5
−6


3
2
1
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6
−1
−2
−3
−4
−5
−6


3
2
1
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6
−1
−2
−3
−4
−5
−6

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \succ -1 \\ x^3 & si \quad x \leq -1 \end{cases}$$

$$\mathrm{g}(x) = \begin{cases} x & si \quad x \succ -1 \\ x^3 & si \quad x < -1 \end{cases}$$

$$\mathrm{h}(x) = \begin{cases} x + 1 & si \quad x \succ -1 \\ x^3 & si \quad x \leq -1 \end{cases}$$

$$\mathrm{g1}(x) = \begin{cases} x & si \quad x \succ -1 \\ 2 & si \quad x = -1 \\ x^3 & si \quad x < -1 \end{cases}$$

## Continuidad en un punto:

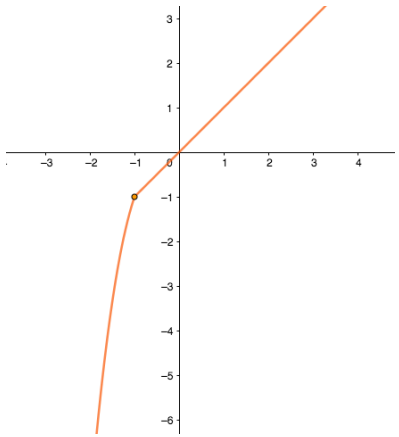
La función $f(x)$ es continua en $x = a$ si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

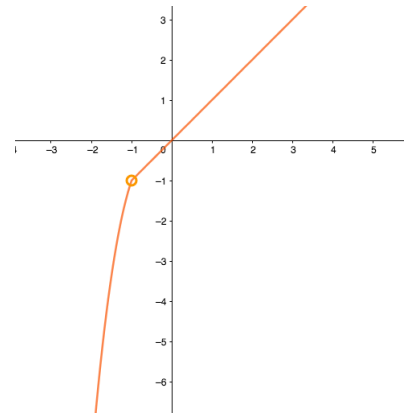
Otra forma de definir la continuidad de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ es pedir que se cumplan las tres condiciones siguientes:

1. $f(a)$ está definida, es decir, $a$ está en el dominio de $f$.
2. Existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$
3. $L = f(a)$

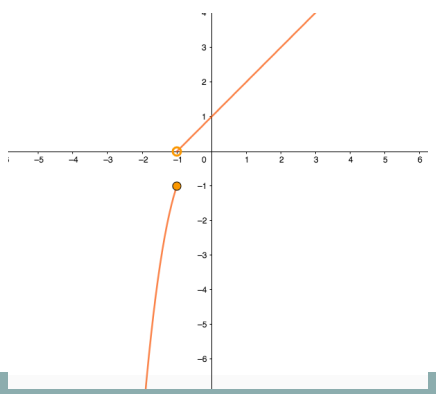
$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \succ -1 \\ x^3 & si \quad x \leq -1 \end{cases}$$



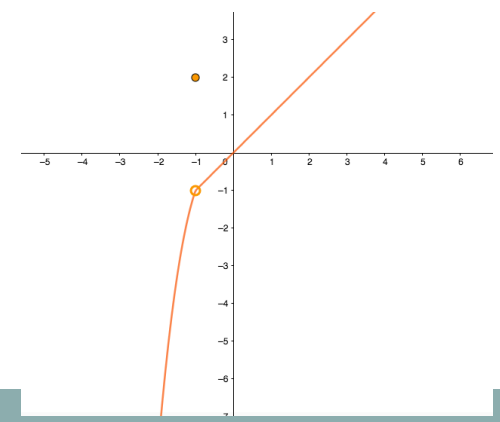
$$\mathrm{g}(x) = \begin{cases} x & si \quad x \succ -1 \\ x^3 & si \quad x < -1 \end{cases}$$



$$\mathrm{h}(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \succ -1 \\ x^3 & si \quad x \leq -1 \end{cases}$$



$$\mathrm{g}(x) = \begin{cases} x & si \quad x \succ -1 \\ 2 & si \quad x = -1 \\ x^3 & si \quad x < -1 \end{cases}$$



9)

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-4} & \text{si } x \neq 4 \\ -\frac{6}{7} & \text{si } x = 4 \end{cases}$ en $x = 4$

1. $f(a)$ está definida, es decir, $a$ está en el dominio de $f$.
2. Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$
3. $L = f(a)$

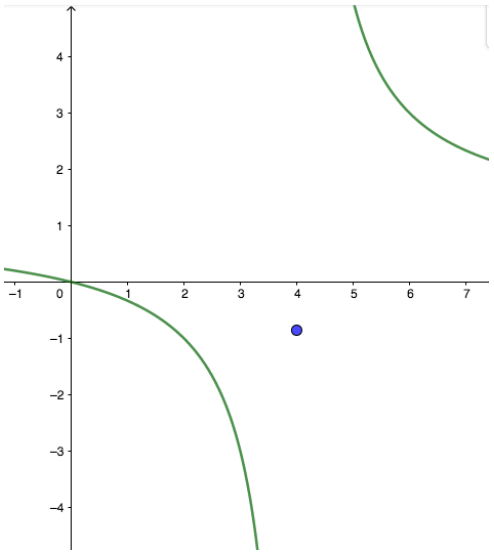
1) a= 4 f(4)=-6/7

2) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

$\lim\limits_{t \longrightarrow 4^+} \frac{x}{x-4} = +\infty$

Como el límite es infinito no se cumple la condición 2

f(x) es discontinua en x=4



10. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en todo su dominio y graficarlas:

$$\text{c) } f_3(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$f_3(x)$ es continua en los intervalos $(-\infty, -1)$; $(-1,2)$ $y$ $(2, +\infty)$ pues en cada uno de esos intervalos está definida por una función polinómica.

Nos queda analizar la continuidad en los $x$ donde la función "cambia".
En este caso: $x = -1$ $y$ $x = 2$

1. $f(a)$ está definida, es decir, $a$ está en el dominio de $f$.
2. Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$
3. $L = f(a)$

$x = -1$

1. $f_3(-1) = (-1)^3 = -1$

2. $\lim_{x \to -1} f_3(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1^+} f_3(x) = \lim_{x \to -1^+} x = -1 \\ \lim_{x \to -1^-} f_3(x) = \lim_{x \to -1^-} x^3 = (-1)^3 = -1 \end{array}\right\} \lim_{x \to -1} f_3(x) = -1$$

3. $f_3(-1) = \lim_{x \to -1} f_3(x) = -1$

$f_3(x)$ es continua en x=-1

$x = 2$

1. $f_3(2) = -(2)^2 + 4 = -4 + 4 = 0$

2. $\lim\limits_{x \to 2} f_3(x)$

$$\lim_{x \to 2^+} f_3(x) = \lim_{x \to 2^+} -x^2 + 4 = -2^2 + 4 = 0$$

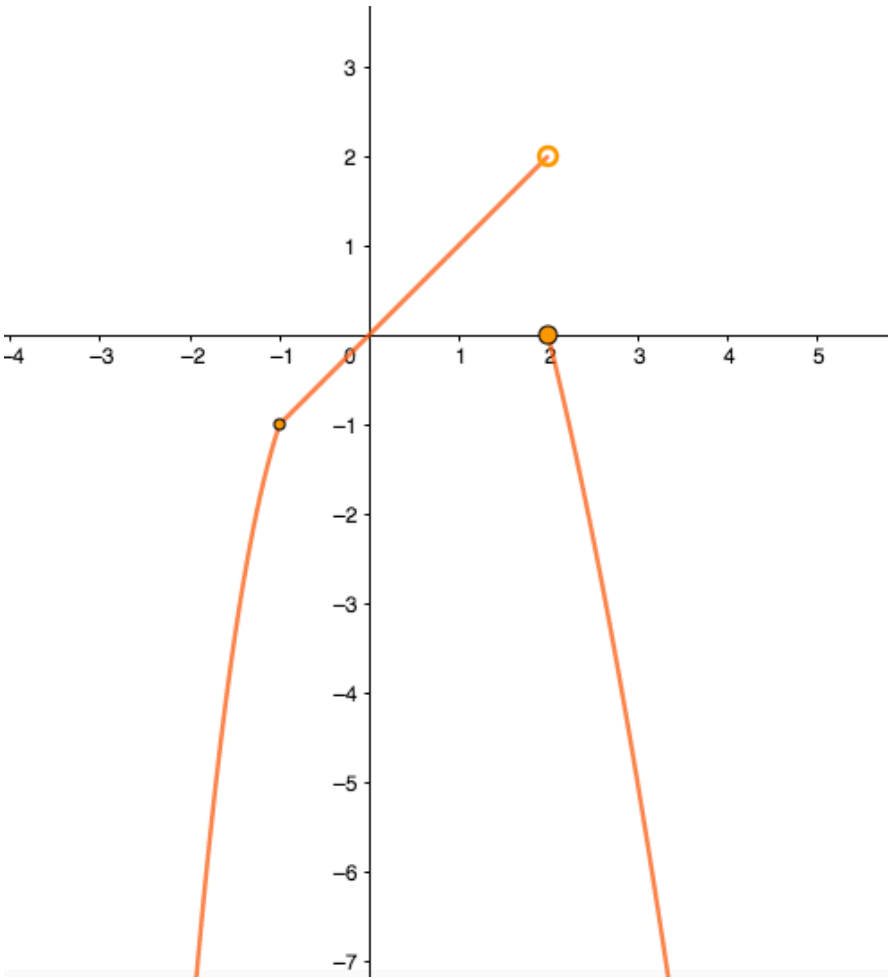
$$\lim_{x \to 2^-} f_3(x) = \lim_{x \to 2^-} x = 2$$

Como los límites laterales no son iguales el $\lim\limits_{x \to 2} f_3(x)$ no existe

$f_3(x)$ no es continua en $x = 2$

**<u>Rta</u>**: $f_3(x)$ es una función continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

c) $f_3(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$



Redefinición de una función para que sea continua

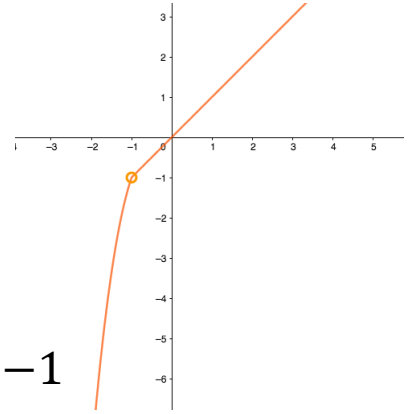
Si $f(x)$ no está definida en $x = a$ (es decir, $a$ no pertenece al dominio de $f$ y por lo tanto no es continua en $a$), pero existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ entonces puede redefinirse de modo que sea continua en $a$:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \\ L & \text{si } x = a \end{cases}$$

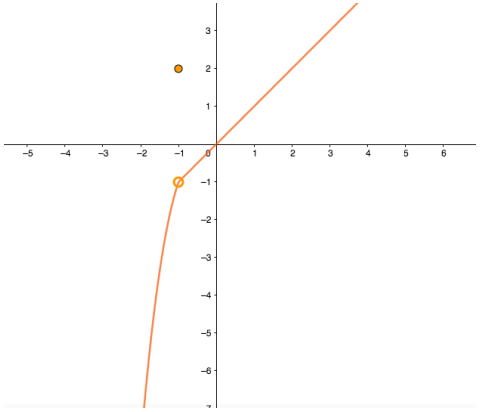
¿Cuál o cuáles de las siguientes funciones se pueden redefinir para qué sean continuas en x=-1?

$$h(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \succ -1 \\ x^3 & si \quad x \leq -1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & si \quad x \succ -1 \\ x^3 & si \quad x < -1 \end{cases}$$

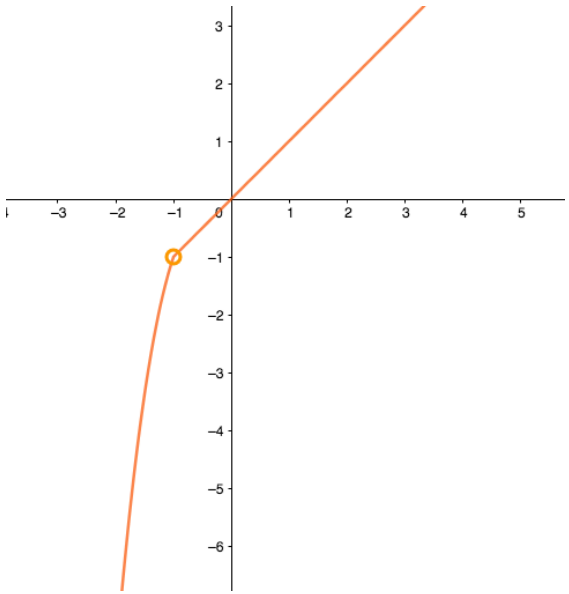


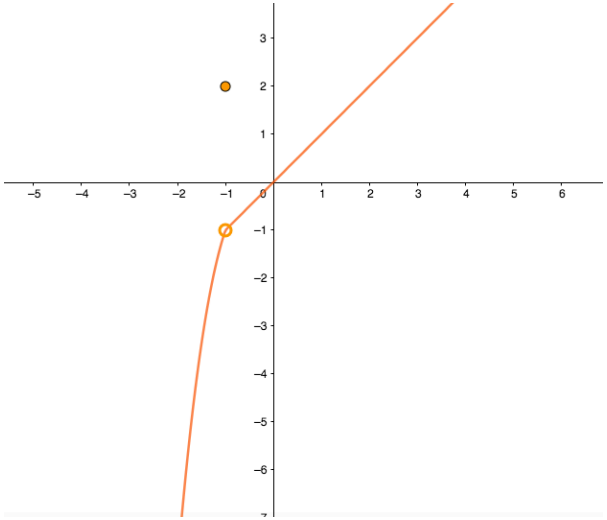
$$g1(x) = \begin{cases} x & si \quad x \succ -1 \\ 2 & si \quad x = -1 \\ x^3 & si \quad x < -1 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} x & si \quad x \succ -1 \\ x^3 & si \quad x \leq -1 \end{cases}$$

$$g1(x) = \begin{cases} x & si \quad x \succ -1 \\ 2 & si \quad x = -1 \\ x^3 & si \quad x < -1 \end{cases}$$



7) a)
El lim del numerador es 0 y el denominador es 0, por lo tanto, es un lim indeterminado

$$\lim_{x \longrightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{-3x - 9} = \lim_{x \longrightarrow -3} \frac{(x+3)(x+3)}{-3.(x+3)} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow -3} \frac{(x+3)}{-3} = 0$$

7) b)

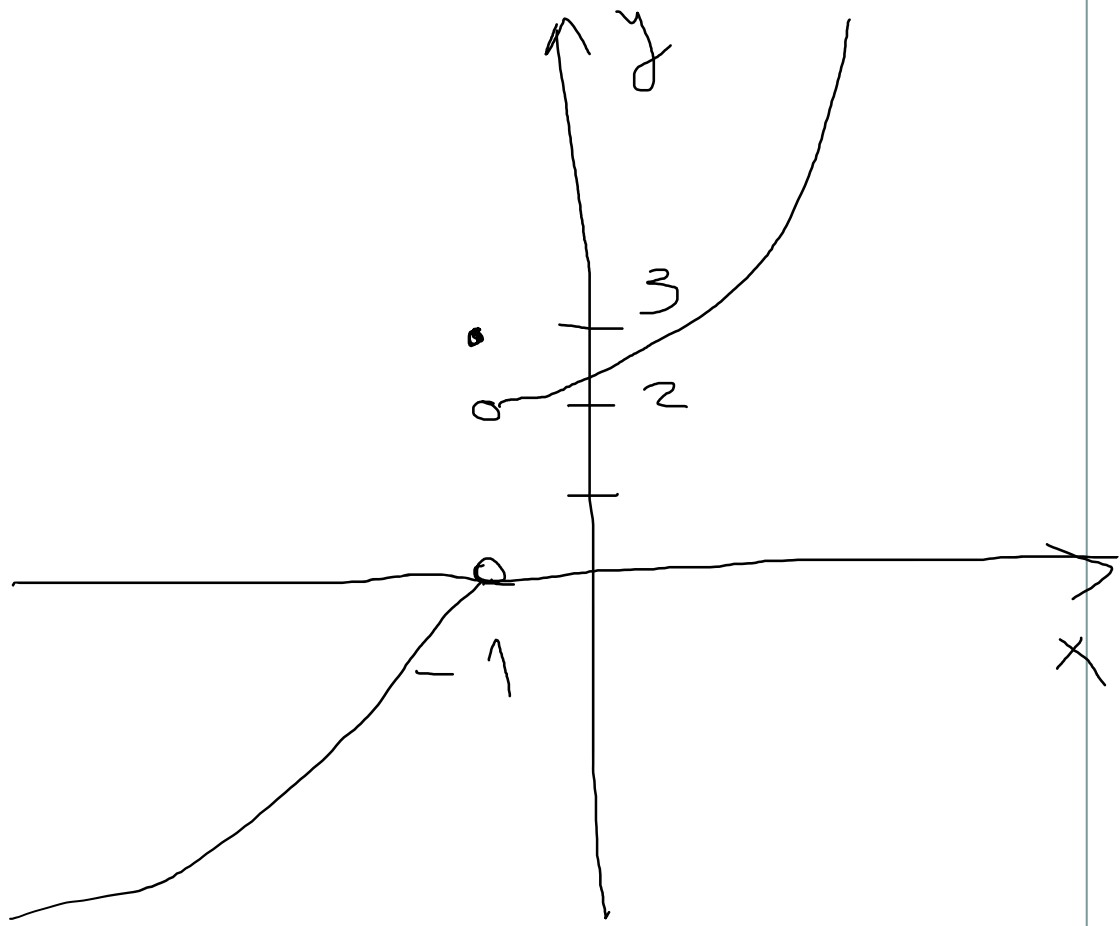
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2 + 6x + 9}{-3x - 9} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2\,(1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2})}{x\,(-3 - \frac{9}{x^2})} =$$

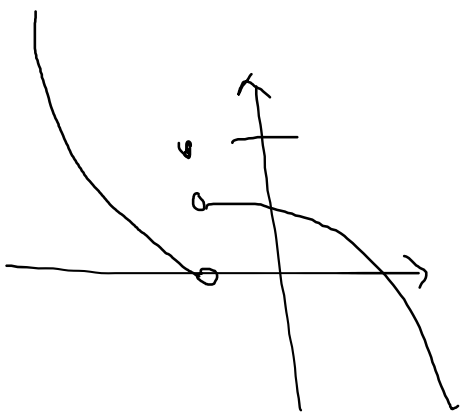
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x\,(1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2})}{(-3 - \frac{9}{x^2})} = \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x\,.1}{-3} = +\infty$$

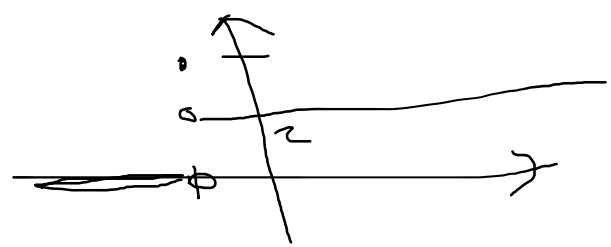
g(-1)=3

$$\lim_{x \to -1^+} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \to -1^-} g(x) = 0$$





Para la semana que viene:

- Completar los ejercicios del capítulo 12 )

Si tenés alguna pregunta durante la semana hacé tu consulta en el Foro del Aula Virtual.