Temas de Matemática

Matemática Básica para Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal

Segunda Parte-2020

Cecilia Zulema González

Horacio Agustín Caraballo

Índice general

Capítulo 10

Rectas en el Espacio. Planos.

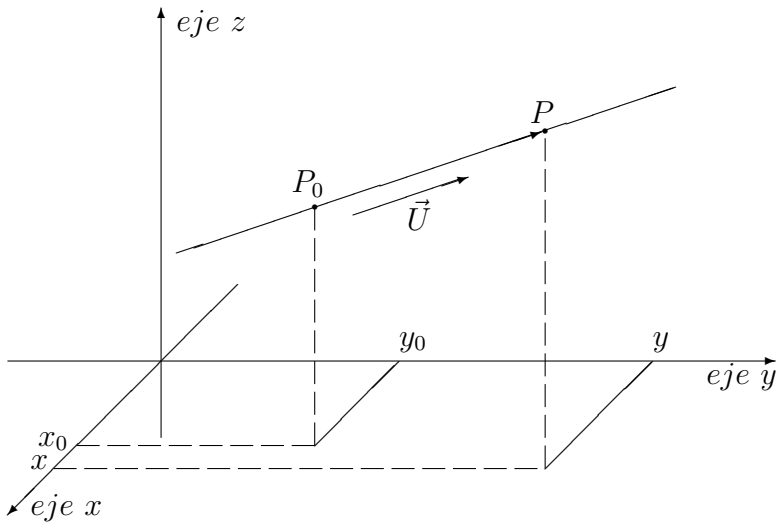
10.1. La recta

10.1.1. Ecuación vectorial de la recta

En esta sección caracterizaremos los puntos del lugar geométrico del espacio que se encuentran sobre una recta. Para esto consideremos que todos los vectores cuyos orígenes y extremos están sobre la recta son múltiplos de un vector dado al que llamaremos **vector director** de la recta.
Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto fijo de la recta y $P(x, y, z)$ es cualquier otro punto entonces:

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{U}$$

donde $\vec{U}$ es el vector director y t es un número real.



Resumiendo: Para determinar una recta hacen falta:

- Un vector ($\vec{U}$) que le dé la dirección.
- Un punto (P_0) que la fije en el espacio

Con mas detalle, si $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera de la recta, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es el punto dado, t es un parámetro real y $\vec{U} = \langle a, b, c\rangle$ el vector que la dirige, la **ecuación vectorial de la recta** es:

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = \langle ta, tb, tc\rangle$$

10.1.2. Ecuación paramétrica cartesiana de la recta

Igualando las componentes de los vectores, podemos escribir la ecuación anterior:

$$\begin{cases} x - x_0 = t\ a \\ y - y_0 = t\ b \\ z - z_0 = t\ c \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

O también:

$$\begin{cases} x = a\ t + x_0 \\ y = b\ t + y_0 \\ z = c\ t + z_0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

10.1.3. Forma simétrica de la recta

Despejando el parámetro t de las tres ecuaciones paramétricas e igualando se obtiene:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Observaciones: Esta forma de la recta solo puede darse si las tres componentes del vector director son diferentes de cero (recordar que no se puede dividir por cero). Hay que tener en cuenta, también, que si se necesita operar algebraicamente con la recta, debe presentársela como dos ecuaciones, que obtenidas de esta forma simétrica pueden ser:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} \\ \\ \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}$$

10.1.4. Posiciones relativas entre dos rectas

Llamaremos a las rectas con la letra ℓ y un subíndice que las identifique. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas con vectores directores $\vec{U}_1$ y $\vec{U}_2$ respectivamente. Daremos condiciones para decidir si dos rectas son perpendiculares, paralelas o ninguna de estas alternativas.

Rectas paralelas o coincidentes

Dos rectas son paralelas o coincidentes si sus vectores directores tienen la misma dirección. En otras palabras, si $\vec{U}_1$ es el vector director de ℓ_1 y $\vec{U}_2$ es el vector director de ℓ_2 entonces ℓ_1 es paralela o coincidente con ℓ_2 si:

$$\vec{U}_1 = \lambda\, \vec{U}_2$$

Donde λ es un número real.

Ejemplos:

1. Dadas las rectas

$$\ell_1 \ : \ \begin{cases} x = & \frac{1}{2} - 6t \\ y = & 11 + 2t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = & -1 + 4t \end{cases} \qquad \ell_2 : \ \begin{cases} x = & 2 + 3h \\ y = & -h \qquad h \in \mathbb{R} \\ z = & -7 - 2h \end{cases}$$

$\vec{U}_1 = \langle -6, 2, 4 \rangle$ es el vector director de ℓ_1 $\quad \vec{U}_2 = \langle 3, -1, -2 \rangle$ es el vector director de ℓ_2.

Como $\vec{U}_2 = -\frac{1}{2}\vec{U}_1$ los vectores directores tienen la misma dirección, es decir que las rectas son paralelas o son coincidentes.

Para verificar cual es la situación en este caso elegimos un punto de la recta ℓ_1 y vemos si pertenece o no a la recta ℓ_2.

Por ejemplo: el punto $Q(-\frac{11}{2}, 13, 3)$ pertenece a ℓ_1 debemos fijarnos si está en la recta ℓ_2, es decir, vemos si existe un valor de h que sea solución del sistema:

$$\begin{cases} -\frac{11}{2} = & 2 + 3h \\ 13 = & -h \\ 3 = & -7 - 2h \end{cases}$$

pero se ve que no tiene solución, luego las dos rectas no tienen puntos comunes. Por lo tanto las rectas son **paralelas**.

2. Dadas las rectas

$$\ell_1 : \begin{cases} x = & \frac{1}{2} - 6t \\ y = & 11 + 2t \\ z = & -1 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = & -4 + 3h \\ y = & \frac{25}{2} - h \\ z = & 2 - 2h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}$$

$\vec{U}_1 = \langle -6, 2, 4 \rangle$ es el vector director de ℓ_1 $\vec{U}_2 = \langle 3, -1, -2 \rangle$ es el vector director de ℓ_2.

Como $\vec{U}_2 = -\frac{1}{2}\vec{U}_1$ los vectores directores tienen la misma dirección, es decir que las rectas son paralelas o son coincidentes.

Para verificar cual es la situación en este caso, elegimos un punto de la recta ℓ_1 y vemos si pertenece o no a la recta ℓ_2.

Por ejemplo: el punto $Q(-\frac{11}{2}, 13, 3)$ pertenece a ℓ_1 debemos fijarnos si está en la recta ℓ_2, es decir vemos si existe un valor de h que sea solución del sistema: $\begin{cases} -\frac{11}{2} = & -4 + 3h \\ 13 = & \frac{25}{2} - h \\ 3 = & 2 - 2h \end{cases}$ este valor es $h = \frac{1}{2}$, las dos rectas tienen la misma dirección y además hay un punto en común. Por lo tanto las rectas son **coincidentes**.

Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares. Esto es, si el producto escalar de estos últimos es cero:

$$\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 = 0$$

Intersección de rectas

Sean dos rectas: ℓ_1 dirigida por $\vec{U}_1 = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y ℓ_2 dirigida por $\vec{U}_2 = \langle a_1, b_2, c_2 \rangle$ que pasa por el punto

$P_2(x_2, y_2, z_2)$, si $\vec{U}_1 \neq \lambda\ \vec{U}_2$, entonces las rectas **se cortan o son alabeadas**
Si ℓ_1 tiene ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = t\ a_1 + x_1 \\ y = t\ b_1 + y_1 \\ z = t\ c_1 + z_1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

y ℓ_2 tiene ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = h\ a_2 + x_2 \\ y = h\ b_2 + y_2 \\ z = h\ c_2 + z_2 \end{cases} \qquad h \in \mathbb{R}$$

y las rectas se cortan en un punto deben existir h y t tales que:

$$\begin{cases} t\ a_1 + x_1 = h\ a_2 + x_2 \\ t\ b_1 + y_1 = h\ b_2 + y_2 \\ t\ c_1 + z_1 = h\ c_2 + z_2 \end{cases}$$

que es equivalente al sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas h y t siguiente:

$$\begin{cases} a_1\ t - a_2\ h = x_2 - x_1 \\ b_1\ t - b_2\ h = y_2 - y_1 \\ c_1\ t - c_2\ h = z_2 - z_1 \end{cases}$$

De acuerdo al teorema de Roché-Frobenius, este sistema, puede ser:
1) Compatible determinado, entonces **las rectas se cortan en un punto**. Este punto se obtiene resolviendo el sistema y reemplazando el valor de t en ℓ_1 o el valor de h en ℓ_2.

2) Incompatible, entonces **las rectas son alabeadas**. En otras palabras, sin ser paralelas, no tienen ningún punto en común.

Ejemplos:

1. Dadas las rectas

$$\ell_1 : \begin{cases} x = & 5 - 6t \\ y = & 1 + 2t \\ z = & -1 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = & -4 + 3h \\ y = & -3h \\ z = & 1 - 2h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}$$

$\vec{U}_1 = \langle -6, 2, 4 \rangle$ es el vector director de ℓ_1 $\vec{U}_2 = \langle 3, -3, -2 \rangle$ es el vector director de ℓ_2.

Como $\vec{U}_1 \neq \lambda\, \vec{U}_2$ las rectas se cortan en un punto o son alabeadas.

Para determinar cual es la situación planteamos el sistema:

$$\begin{cases} 5 - 6t & = -4 + 3h \\ 1 + 2t & = -3h \\ -1 + 4t & = 1 - 2h \end{cases} \quad \text{que es equivalente a:} \quad \begin{cases} -6t - 3h & = -9 \\ 2t + 3h & = -1 \\ 4t + 2h & = 2 \end{cases}$$

La matriz del sistema es: $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2.

La matriz ampliada es: $\begin{pmatrix} -6 & -3 & -9 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ que tiene rango 3.

Por lo tanto el sistema no tiene solución y las rectas son **alabeadas**.

2. Dadas las rectas

$$\ell_1 : \begin{cases} x = & -1 - 6t \\ y = & 1 + 2t \\ z = & -1 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = & -4 + 3h \\ y = & -3h \\ z = & 1 - 2h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}$$

$\vec{U}_1 = \langle -6, 2, 4 \rangle$ es el vector director de ℓ_1 $\quad \vec{U}_2 = \langle 3, -3, -2 \rangle$ es el vector director de ℓ_2.

Como $\vec{U}_1 \neq \lambda\, \vec{U}_2$ las rectas se cortan en un punto o son alabeadas.

Para determinar cual es la situación planteamos el sistema:

$$\begin{cases} -1 - 6t & = -4 + 3h \\ 1 + 2t & = -3h \\ -1 + 4t & = 1 - 2h \end{cases} \quad \text{que es equivalente a:} \quad \begin{cases} -6t - 3h & = -3 \\ 2t + 3h & = -1 \\ 4t + 2h & = 2 \end{cases}$$

La matriz del sistema es: $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2.

La matriz ampliada es: $\begin{pmatrix} -6 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ que también tiene rango 2.

Por lo tanto el sistema tiene solución única y las rectas se cortan en un punto.

La solución del sistema es $t = 1, \quad h = -1$.

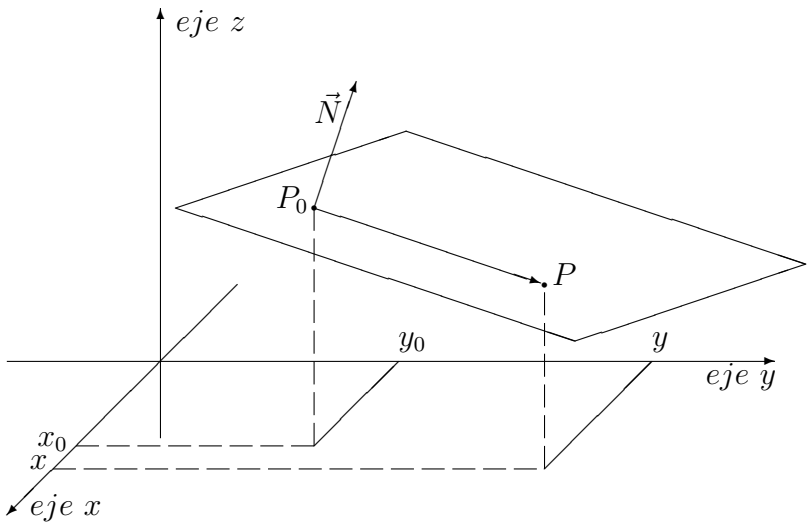
El punto de intersección es $(-7, 3, 3)$.

10.2. El plano

Caracterizaremos los puntos del lugar geométrico del espacio que se encuentran sobre un plano. Al igual que con la recta, un plano queda perfectamente determinado si tenemos un vector $(\vec{N})$ que le dé la dirección y un punto (P_0) que lo fije en el espacio.

La situación se presenta en el siguiente gráfico. Notar que el vector no pertenece al plano sino que es perpendicular al mismo (si quisiéramos dirigir el plano con vectores pertenecientes al mismo serían necesarios al menos dos

que no fueran colineales, esta situación se contemplará mas adelante).



10.2.1. Ecuación vectorial del plano

En el gráfico anterior:

- $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto dado del plano y $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera del mismo.
- $\vec{N} = \langle A, B, C \rangle$ el vector normal (perpendicular) que lo dirige.
- $\overrightarrow{P_0P} = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle$ es el vector que pertenece al plano que se construye con los dos puntos.

Está claro que los dos vectores $\overrightarrow{P_0P}$ y $\vec{N}$ son perpendiculares, recordando el producto escalar entre vectores, la **ecuación vectorial del plano** será:

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

10.2.2. Ecuación cartesiana del plano

Desarrollando el producto escalar, que define al plano, obtenemos:

$$\langle A, B, C\rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0$$

Finalmente la ecuación cartesiana del plano es:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

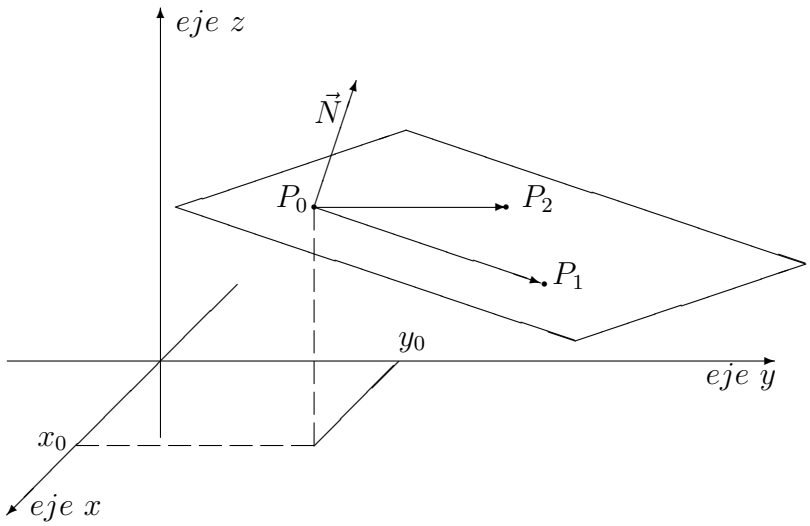
Otra forma habitual de presentar esta ecuación es la que se obtiene distribuyendo y agrupando:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Donde $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$

10.2.3. Plano determinado por tres puntos no alineados

Dados tres puntos no alineados en el espacio, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ encontraremos la ecuación del plano que ellos determinan. Como dijimos, esto será posible si tenemos el vector $\vec{N} = \langle A, B, C\rangle$ y un punto. El punto puede ser cualquiera de los tres dados, por ejemplo $P_0(x_0, y_0, z_0)$, nos queda la tarea de encontrar el vector normal $\vec{N} = \langle A, B, C\rangle$. Para esto hay que construir los vectores $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}$. La situación se presenta en el siguiente gráfico:



Utilizando el producto vectorial, el vector $\vec{N}$ será:

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$$

Finalmente con el punto P_0 y el vector $\vec{N}$ podemos construir el plano como en la sección anterior, esto es, dar su ecuación cartesiana.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación cartesiana del plano que queda determinado por los tres puntos $P_0(0,4,-1)$, $P_1(1,-1,2)$, $P_2(2,-3,5)$. Los vectores que pertenecen al plano son:

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \langle 1,-5,3\rangle\,, \qquad \overrightarrow{P_0P_2} = \langle 2,-7,6\rangle\,.$$

Notar que no existe un número λ de modo que se cumpla $\overrightarrow{P_0P_1} = \lambda\overrightarrow{P_0P_2}$, es decir, que los vectores no son colineales.

Entonces $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} = \langle -9,0,3\rangle$

La ecuación cartesiana del plano será: $-9(x-0)+0(x-4)+3(z+1) = 0$

10.2.4. Posiciones relativas entre dos planos

Consideremos dos planos, uno que está dirigido por el vector $\vec{N}_1 = \langle A_1, B_1, C_1 \rangle$ y pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ el otro dirigido por $\vec{N}_2 = \langle A_2, B_2, C_2 \rangle$ y pasa por $P_2(x_2, y_2, z_2)$.
Tendremos las siguientes alternativas.

Planos paralelos o coincidentes

Dos planos son paralelos o coincidentes si sus vectores directores tienen la misma dirección. En otras palabras, si $\vec{N}_1$ es el vector director de uno de los planos y $\vec{N}_2$ es el vector director del otro plano:

$$\overrightarrow{N}_1 = \lambda \overrightarrow{N}_2$$

Ejemplos:

1. Dados los planos:

   $\Pi_1 : \ x - 3y + 6z - 2 = 0 \qquad \Pi_2 : \ -\frac{1}{3}x + y - 2z + 1 = 0$

   $\vec{N}_1 = \langle 1, -3, 6 \rangle$ es el vector director de Π_1 $\quad \vec{N}_2 = \left\langle -\frac{1}{3}, 1, -2 \right\rangle$ es el vector director de Π_2. Como $\vec{N}_2 = -\frac{1}{3}\vec{N}_1$ los vectores directores tienen la misma dirección, es decir que los planos son paralelos o son coincidentes.
   Para verificar cual es la situación en este caso, elegimos un punto del plano Π_1 y vemos si pertenece o no al plano Π_2.
   El punto $Q(2, 0, 0)$ pertenece a Π_1 debemos fijarnos si está en el plano Π_2, es decir vemos si las coordenadas de Q son solución de la ecuación de Π_2:

   $-\frac{1}{3}2 + 0 - 2 \cdot 0 + 1 = \frac{2}{3} \neq 0$

puesto que las coordenadas de Q no son solución de la ecuación, significa que los dos planos no tienen puntos comunes.

En este caso los planos son **paralelos**.

2. Dados los planos:

   $\Pi_1 : \ x - 3y + 6z - 2 = 0 \qquad \Pi_2 : \ -\frac{1}{3}x + y - 2z = -\frac{2}{3}$

   $\vec{N}_1 = \langle 1, -3, 6 \rangle$ es el vector director de Π_1 $\quad \vec{N}_2 = \left\langle -\frac{1}{3}, 1, -2 \right\rangle$ es el vector director de Π_2. Como $\vec{N}_2 = -\frac{1}{3}\vec{N}_1$ los vectores directores tienen la misma dirección, es decir que los planos son paralelos o son coincidentes.

   Para verificar cual es la situación en este caso, elegimos un punto del plano Π_1 y vemos si pertenece o no al plano Π_2.

   El punto $Q(2, 0, 0)$ pertenece a Π_1 debemos fijarnos si está en el plano Π_2, es decir vemos si las coordenadas de Q son solución de la ecuación de Π_2:

   $-\frac{1}{3}2 + 0 - 2 \cdot 0 = -\frac{2}{3}$

   puesto que las coordenadas de Q son solución de la ecuación, significa que los dos planos tienen todos sus puntos comunes.

   En este caso los planos son **coincidentes**.

Planos perpendiculares

Los dos planos serán perpendiculares si sus vectores directores lo son:

$$\overrightarrow{N}_1 \cdot \overrightarrow{N}_2 = 0$$

Intersección de dos planos

Si los planos no son paralelos se cortarán en una recta.

Una forma simple de encontrar esta recta es reemplazar cualquiera de las

tres variables, x, y, z, por el parámetro t en las ecuaciones de ambos planos, luego resolver el sistema de dos ecuaciones en función de t, obteniéndose las ecuaciones paramétricas de la recta. A modo de ejemplo:

$$\begin{cases} A_1(t-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0 \\ A_2(t-x_2)+B_2(y-y_2)+C_2(z-z_2)=0 \end{cases}$$

Encontrando los valores de y y z en términos de t obtenemos las ecuaciones paramétricas buscadas.

Ejemplo:

Dados los planos: $\Pi_1:\ x-3y+6z-2=0$ $\Pi_2:\ -x-3y+z-1=0$ $\vec{N}_1=\langle 1,-3,6\rangle$ es el vector director de Π_1 $\vec{N}_2=\langle -1,-3,1\rangle$ es el vector director de Π_2. Como $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$ no tienen la misma dirección (uno no es múltiplo del otro), los planos no son paralelos ni son coincidentes.
Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x=t \\ x-3y+6z-2=0 \\ -x-3y+z-1=0 \end{cases}$$

que puede considerarse como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y z:

$$\begin{cases} -3y+6z=2-t \\ -3y+z=1+t \end{cases}$$

resolviendo y recordando que $x=t$ queda:

$$\begin{cases} x=t \\ y=-\frac{7}{15}t-\frac{4}{15} \\ z=-\frac{2}{5}t+\frac{1}{5} \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta que surge como intersección de los dos planos.

10.2.5. Posiciones relativas entre una recta y un plano

Dada la recta:

$$\begin{cases} x = a\ t + x_1 \\ y = b\ t + y_1 \\ z = c\ t + z_1 \end{cases}$$

y el plano:

$$A(x - x_2) + B(y - y_2) + C(z - z_2) = 0$$

Tendremos las siguientes alternativas.

El plano y la recta son paralelos o la recta esta contenida en el plano

Si los vectores directores son perpendiculares entonces el plano y la recta son paralelos o la recta está contenida en el plano, esto es:

$$\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{U} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A\ a + B\ b + C\ c = 0$$

Ejemplos

1) Dados el plano: $\Pi:\ x - 3y + z - 2 = 0$ y la recta $\ell: \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = t - 3 \end{cases}$

$\vec{N} = \langle 1, -3, 1 \rangle$ es el vector director de Π $\quad \vec{U} = \langle 2, 1, 1 \rangle$ es el vector director de ℓ.

Como $\vec{N} \cdot \vec{U} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$ los vectores directores son

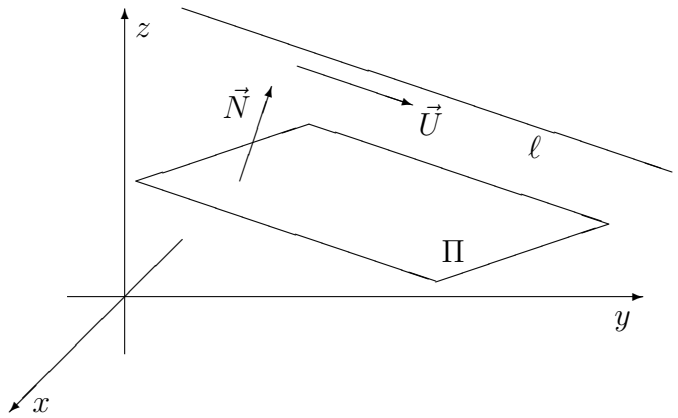
perpendiculares y la recta y el plano son paralelos (si no tienen ningún punto común) o la recta está contenida en el plano.

Para ver cual es el caso tomamos un punto de la recta y nos fijamos si pertenece o no al plano.

$P_0(2,1,-3)$ está en la recta ℓ para ver si está en el plano :

$2-3\cdot 1+(-3)-2=-6\neq 0$

el punto P_0 no pertenece al plano y entonces la recta y el plano son paralelos.



2) Dados el plano: $\Pi:\ x-3y+z-2=0$ y la recta $\ell:\ \begin{cases} x=2t+6 \\ y=t+1 \\ z=t-3 \end{cases}$

$\vec{N}=\langle 1,-3,1\rangle$ es el vector director de Π ; $\vec{U}=\langle 2,1,1\rangle$ es el vector director de ℓ.

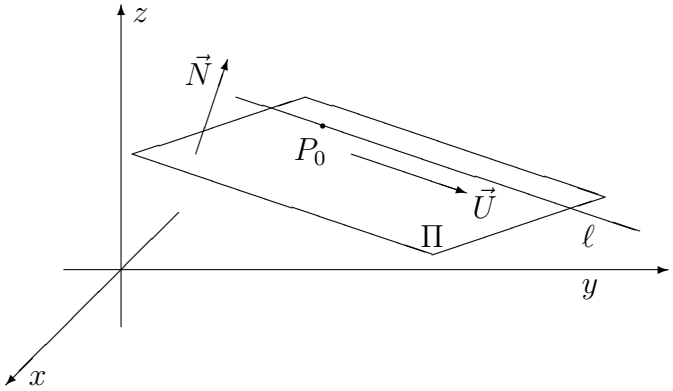
Como $\vec{N}\cdot\vec{U}=1\cdot 2+(-3)\cdot 1+1\cdot 1=0$ los vectores directores son perpendiculares y la recta y el plano son paralelos (si no tienen ningún punto común) o la recta está contenida en el plano.

Para ver cual es el caso tomamos un punto de la recta y nos fijamos si pertenece o no al plano.

$P_0(6,1,-3)$ está en la recta ℓ para ver si está en el plano :

$6 - 3 \cdot 1 + (-3) - 2 = 0$

Luego, el punto P_0 pertenece al plano y entonces la recta está contenida en el plano.



El plano y la recta son perpendiculares

Si los vectores directores son paralelos el plano y la recta son perpendiculares, esto es:

$$\overrightarrow{N} = \lambda \overrightarrow{U}$$

Intersección entre el plano y la recta

Si la recta y el plano no son paralelos entonces se cortan en un punto. Este punto se determina resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} A(x - x_2) + B(y - y_2) + C(z - z_2) = 0 \\ x = a\ t + x_1 \\ y = b\ t + y_1 \\ z = c\ t + z_1 \end{cases}$$

Ejemplo: Encontrar, si existe, el punto de intersección entre el plano de ecuación $-2x + 3y + z = 5$ con la recta que pasa por $P_0(1,1,8)$ y dirigida

por $\vec{U} = \langle -3, 4, 0 \rangle$. El vector normal al plano es $\vec{N} = \langle -2, 3, 1 \rangle$ como $\vec{N} \cdot \vec{U} = (-2)(-3) + 4\,3 + 0\,1 = 18 \neq 0$ el plano y la recta no son paralelos, luego existe un punto de intersección entre ellos y se determina resolviendo:

$$\begin{cases} -2x + 3y + z = 5 \\ x = -3\ t + 1 \\ y = 4\ t + 1 \\ z = 8 \end{cases}$$

Reemplazando en la primera ecuación: $-2(-3\ t + 1) + 3(4\ t + 1) + 8 = 5$

Luego la solución del sistema es $t = -\frac{2}{9}$ $x = \frac{15}{9}$ $y = \frac{1}{9}$ $z = 8$. El punto de intersección es $Q(\frac{15}{9}, \frac{1}{9}, 8)$

10.3. Ejercicios

1. $\bigoplus \bigotimes \bigodot \odot \otimes \oplus$ Dado el vector $\vec{U} = \langle 3, 2, 4 \rangle$ y el punto $P_0(2, 3, 5)$.

   a) Escribir la ecuación vectorial de la recta.

   b) Escribir las ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta.

   c) Escribir la recta en forma simétrica.

   d) Graficar una parte de la recta.

2. Considerar una recta paralela al eje z que pasa por el punto $P_0(1, 4, 0)$.

   a) Escribir su ecuación vectorial.

   b) Escribir sus ecuaciones paramétricas cartesianas.

   c) ¿Es posible escribir la recta en forma simétrica?

   d) Graficar una parte de la recta.

3. Escribir la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1,-3,6)$ $P_2(2,4,1)$. Graficar y encontrar otros dos puntos que estén en la recta.

4. Dadas las rectas:

$$\ell_1\colon \begin{cases} x = 3\,t + 1 \\ y = -2\,t \\ z = \ t - 2 \end{cases} \qquad \ell_2\colon \begin{cases} x = \ t + 2 \\ y = \ t \\ z = -\,t - 2 \end{cases}$$

ℓ_3: $\dfrac{x-4}{-6} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z}{-2}$ $\qquad$ ℓ_4: pasa por $P_1(-3,1,7)$ $P_2(-2,-1,4)$

ℓ_5: pasa por $P_1(3,1,-3)$ $P_2(0,-2,0)$

Tomándolas de a pares decidir si: son paralelas, coincidentes, perpendiculares, ninguna de las anteriores, se cortan en un punto o son alabeadas.

5. Dado el vector $\vec{U} = \langle 3,2,4\rangle$ y el punto $P_0(2,3,5)$

   a) Escribir la ecuación vectorial del plano.

   b) Escribir la ecuación cartesiana del plano.

   c) Graficar una parte de plano.

   d) Hallar tres puntos del plano.

6. Dados los planos (a los que llamaremos con la letra π con subíndice):

   $\pi_1 : -(x-1) + 2(y+1) - (z-2) = 0$

   $\pi_2 : 2x + y - 8 = 0$

   π_3 : pasa por $P_1(1,-1,8)$; $P_2(4,2,11)$; $P_3(0,-3,5)$

   $\pi_4 : -x + 2y - z = -5$

Tomándolos de a pares decidir si: son paralelos, coincidentes, perpendiculares, ninguna de las anteriores. Si no son paralelos encontrar la recta que surge de la intersección de ambos.

7. Dados el plano $\pi_1 : -2x + 2y - 3z - 7 = 0$ y ℓ_1 la recta que pasa por los puntos $P_1(4, 5, 2)$ y $P_2(3, 6, 1/2)$ decidir si: son paralelos, coincidentes, perpendiculares, ninguna de las dos anteriores. Si no son paralelos encontrar el punto de intersección de ambos.

8. Idem anterior para $\pi_2 : x - 3y + 4z - 2 = 0$ y ℓ_2: : $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{3}$

9. Idem anterior para π_3: $x - 3y + 7z - 2 = 0$ y ℓ_3: la recta dirigida por $\vec{U} = \langle 2, 3, 1\rangle$ y que pasa por el punto $P_0(2, 0, 0)$

10. Encontrar la ecuación cartesiana del plano que contiene los vectores $\vec{A} = \langle -6, 2, 5\rangle$, $\vec{B} = \langle 3, -3, 1\rangle$ y que pasa por el origen. ¿Pertenece el punto $(4, 2, 7)$ al plano?

11. Encontrar la ecuación del plano Π paralelo al plano $-x + 2y = 11$ que pasa por el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 3)$. Encontrar otro punto del plano.

12. El ángulo entre dos planos es el ángulo entre los vectores directores correspondientes a cada uno de los planos. Encontrar el ángulo entre los planos cuyas ecuaciones cartesianas son: $2x - 3y + z = 4 \quad -5x + 2y - 5z = -2$

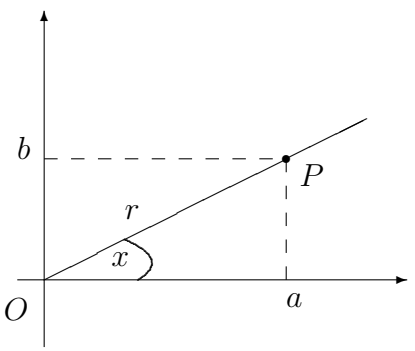
13. Hallar la ecuacion de un plano perpendicular al eje z que pase por el punto $P(3, 0, 0)$. Graficar y hallar dos puntos que pertenezcan al plano.

Capítulo 11

Funciones trigonométricas

11.1. Definiciones

Consideremos un ángulo, cuya medida x está en radianes, formado por el semieje positivo de las absisas y una semirrecta que parte del origen, seleccionemos un punto $P(a, b)$ sobre la semirrecta. El ángulo es positivo si la semirrecta gira en sentido antihorario y negativo en caso contrario.
Sea $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ la distancia del origen al punto $P(a, b)$. Definimos:

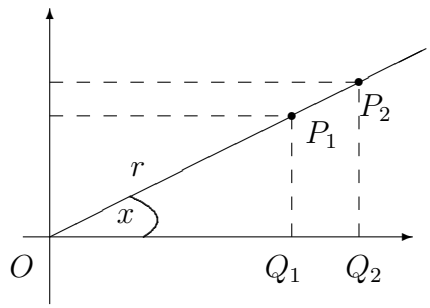


$$\text{sen } x = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{distancia de } P \text{ al origen}} = \frac{b}{r}$$

$$\cos x = \frac{\text{abscisa de } P}{\text{distancia de } P \text{ al origen}} = \frac{a}{r}$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{abscisa de } P} = \frac{b}{a}$$

Notar que los valores del seno y coseno de un ángulo son independientes del punto que se tome sobre la semirrecta que contiene al punto P :



Los triángulos $\overset{\triangle}{OP_1Q_1}$ y $\overset{\triangle}{OP_2Q_2}$ son semejantes y por lo tanto sus lados homólogos son proporcionales, es decir:

$$\frac{P_2Q_2}{OP_2} = \frac{P_1Q_1}{OP_1} = \operatorname{sen} x \qquad \frac{OQ_2}{OP_2} = \frac{OQ_1}{OP_1} = \cos x$$

Por lo tanto las definiciones de estas dos funciones no dependen de la distancia al origen r y puede tomarse $r = 1$ entonces:

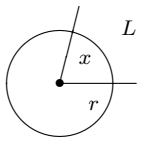
$$\text{sen } x = \text{ordenada del punto } P \qquad \cos\ x = \text{abscisa del punto } P$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{ordenada del punto } P}{\text{abscisa del punto } P}$$

Una forma mas usual para expresar la función tangente es: $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos\ x}$

11.1.1. Medida de ángulos en radianes

La medida de un ángulo x en radianes queda definida como el cociente entre la longitud del arco y la longitud del radio en cualquier circunferencia que tenga como centro el vértice del ángulo.



$$x \text{ en radianes} = \frac{L}{r}$$

Es fácil ver que si un ángulo mide 360° en el sistema sexagesimal entonces mide 2π radianes en el sistema que utilizaremos en este capítulo.

Esta relación permite pasar de un sistema de medición angular a otro (está mal escribir $2\pi = 360°$ ya que una igualdad debe ser homogénea en unidades).

11.1.2. Signos y valores

Considerando los signos de la abscisa y la ordenada del punto P entonces, según el cuadrante en el que se encuentre, los signos de las funciones trigonométricas de x serán:

cuadrante	seno	coseno	tangente
Primero: $0 < x < \pi/2$	$\operatorname{sen} x > 0$	$\cos x > 0$	$\operatorname{tg} x > 0$
Segundo: $\pi/2 < x < \pi$	$\operatorname{sen} x > 0$	$\cos x < 0$	$\operatorname{tg} x < 0$
Tercero: $\pi < x < 3\pi/2$	$\operatorname{sen} x < 0$	$\cos x < 0$	$\operatorname{tg} x > 0$
Cuarto: $3\pi/2 < x < 2\pi$	$\operatorname{sen} x < 0$	$\cos x > 0$	$\operatorname{tg} x < 0$

Para algunos ángulos es sencillo calcular los valores exactos de sus funciones trigonométricas, por ejemplo:

ángulo	seno	coseno	tangente
0	0	1	0
$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	no existe
π	0	-1	0
$3\pi/2$	-1	0	no existe
2π	0	1	0

Cuadro 11.1: Tabla de valores exactos.

11.1.3. Periodicidad de las funciones trigonométricas

Los ángulos que consideramos pueden pensarse formados por la rotación de la semirrecta que parte del origen y el semieje positivo de las abscisas, luego, cualquier par de ángulos que difieran uno de otro en un número entero de vueltas tendrían la misma abscisa y ordenada y por lo tanto los mismos valores para sus funciones trigonométricas. Decimos que las funciones seno y coseno son periódicas y que basta conocer sus valores entre 0 y 2π para obtener cualquier otro valor. Los periodos de cada función se verán en detalle mas adelante pero podemos decir que:
$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+2\pi k)$ y $\cos x = \cos(x+2\pi k)$ donde k es un número entero cualquiera.

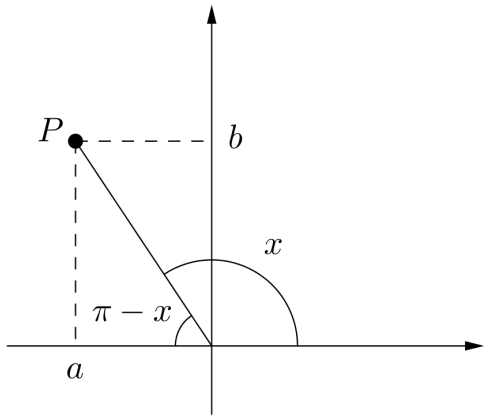
11.2. Reducción al primer cuadrante

Se pueden calcular los valores de las funciones trigonométricas de ángulos que están en el segundo, tercero o cuarto cuadrante, si se conocen los valores de las funciones de un ángulo adecuado en el primer cuadrante:

11.2.1. Angulo en el segundo cuadrante

Si x está en el segundo cuadrante $\pi - x$ está en el primer cuadrante entonces:

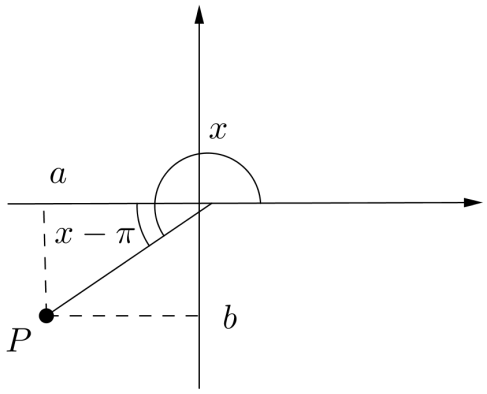
$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x) \qquad \cos x = -\cos(\pi - x) \qquad \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$$



11.2.2. Angulo en el tercer cuadrante

Si x está en el tercer cuadrante $x-\pi$ está en el primer cuadrante entonces:

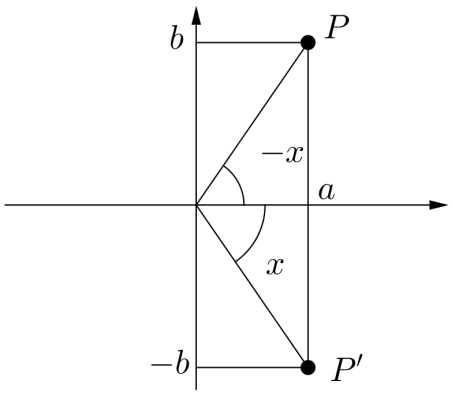
$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(x-\pi) \qquad \cos x = -\cos(x-\pi) \qquad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x-\pi)$$



11.2.3. Angulo en el cuarto cuadrante

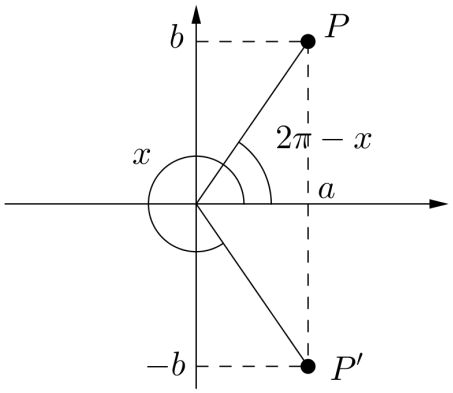
Si x está en el cuarto cuadrante, podemos considerarlo negativo según nuestra convención, luego $-x$ está en el primer cuadrante entonces:

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x) \qquad \cos x = \cos(-x) \qquad \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x)$$



Podríamos interpretar lo anterior del siguiente modo. Si x está en el cuarto cuadrante luego $2\pi - x$ está en el primer cuadrante entonces:

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x) \qquad \cos x = \cos(2\pi - x) \qquad \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(2\pi - x)$$



Observar: para cualquier valor de x:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

11.3. Dominio, imagen y gráficas

11.3.1. Dominio

Las funciones seno y coseno están definidas para cualquier número real x y por lo tanto ambas tienen por dominio el conjunto de los números reales. La función tangente está definida como un cociente entonces su dominio es el conjunto de los números reales que no anulan el denominador.
Como $t(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, su dominio es el conjunto de todos los números reales menos los de la forma $\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ donde n es un número entero $\left(\ldots -\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2} \ldots\right)$

11.3.2. Imagen

Los valores de las funciones seno y coseno están siempre entre -1 y 1 (recordar como están definidas), luego ambas tienen por imagen el intervalo $[-1, 1]$. La función tangente tiene como imagen a todos los números reales.

11.3.3. Periodo

Se ve que cada vuelta completa a la circunferencia tanto el seno como el coseno vuelven a tomar el mismo valor, es decir:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Por eso se dice que ambas funciones tienen **periodo** 2π.
En la función tangente

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$$

luego el periodo es π
En general si $f(x) = \operatorname{sen}(\omega x)$ tenemos:

$$\operatorname{sen}(\omega x) = \operatorname{sen}(\omega x + 2\pi) = \operatorname{sen}(\omega(x + \frac{2\pi}{\omega}))$$

luego

$$f(x) = f(x + \frac{2\pi}{\omega})$$

entonces $f(x)$ tiene **periodo** $\frac{2\pi}{\omega}$.

El mismo argumento puede usarse para la función $g(x) = \cos(\omega x)$.

En Física ω se llama frecuencia angular, al periodo se lo llama T y la inversa del periodo es la frecuencia ν, sintetizando:

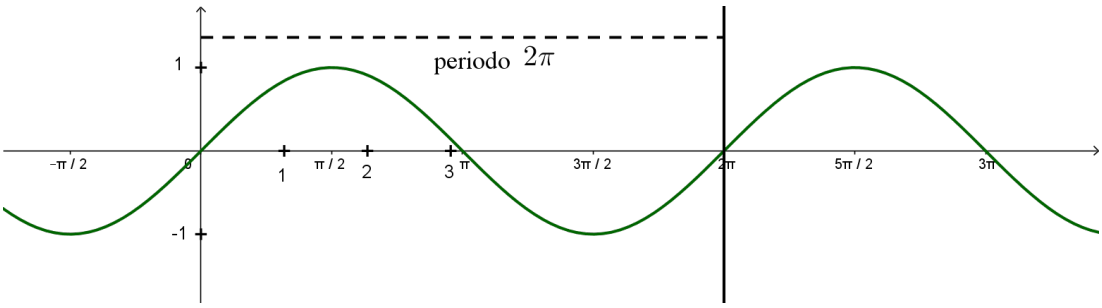
$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

.

11.3.4. Gráficas

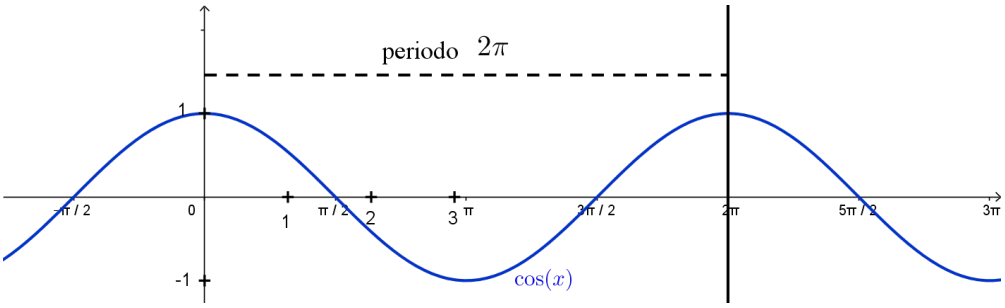
Gráfica de la función seno:

$$s(x) = \operatorname{sen} x$$



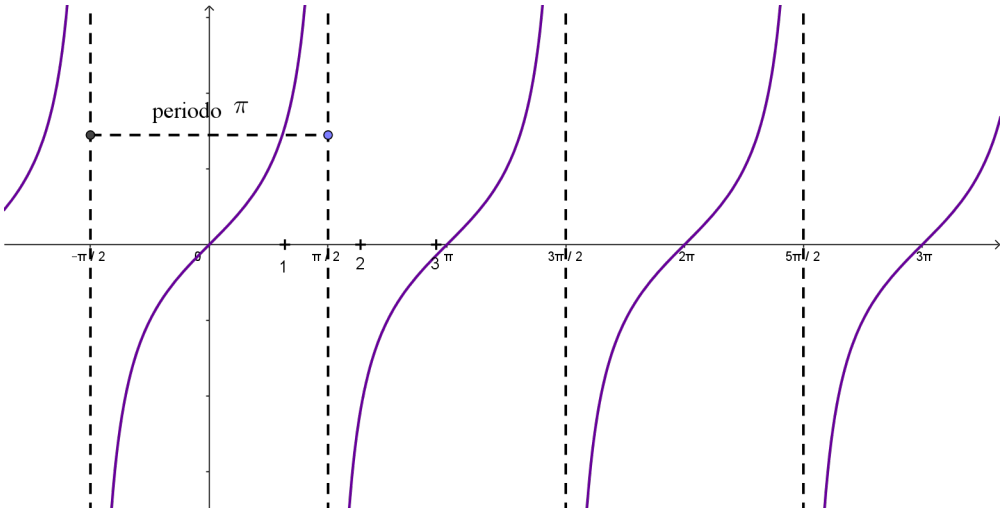
Gráfica de la función coseno

$$c(x) = \cos x$$



Gráfica de la función tangente

$$t(x) = \operatorname{tg} x$$



11.3.5. Ejemplos

1. Determinar para que valores de x la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ vale 0.

   $\operatorname{sen} x = 0$ para los ángulos: π, $-\pi$, 2π, -2π, 3π, -3π, ... Es decir que se anula para ángulos de la forma: $x = k\pi$, donde k es cualquier número entero.

2. Determinar para que valores de x la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ vale 1.

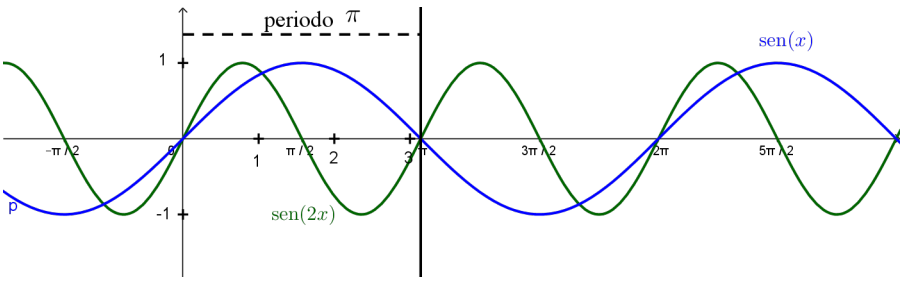
   $\operatorname{sen} x = 1$ para los ángulos: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} - 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi$, $\frac{\pi}{2} - 4\pi$, ... Es

decir que toma el valor 1 para ángulos de la forma: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, donde k es cualquier número entero.

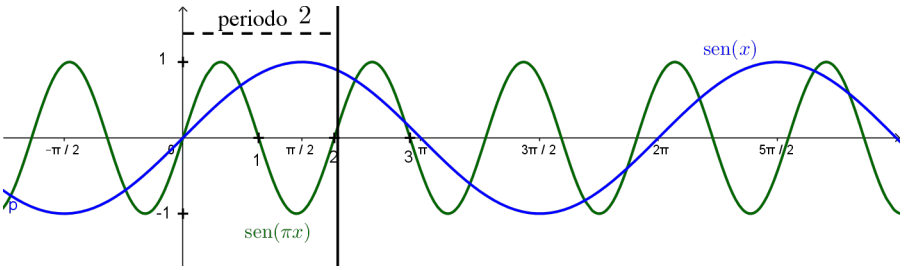
3. Determinar para que valores de x la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ vale -1.
   $\operatorname{sen} x = -1$ para los ángulos: $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi$, $-\frac{\pi}{2}-2\pi$, $-\frac{\pi}{2}+4\pi$, $-\frac{\pi}{2}-4\pi$, ...
   Es decir que toma el valor -1 para ángulos de la forma: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, donde k es cualquier número entero.

4. Determinar para que valores de x la función $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ vale 1.
   $\operatorname{sen}(2x) = 1$ cuando:
   $$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
   o sea cuando
   $$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$
   donde k es un número entero. Es decir que la función $f(x)$ vale 1 si x toma los valores: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$, ...

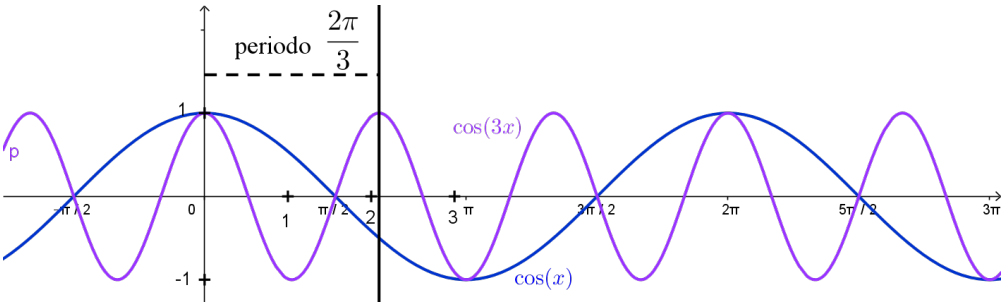
5. Si $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$, $\omega = 2$ y el periodo es $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.



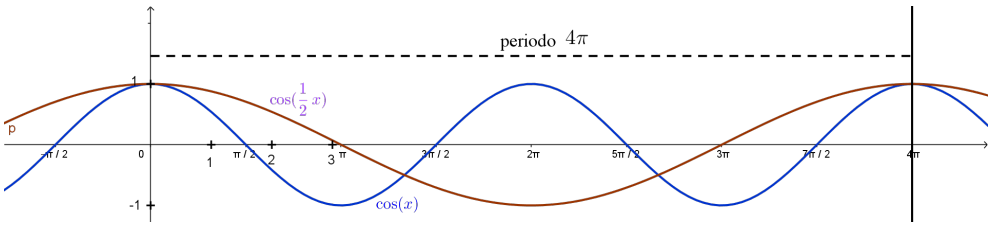
6. Si $g_1(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$, el periodo es $T = \frac{2\pi}{\pi}$.



7. Si $g_2(x) = \cos(3x)$, el periodo es $T = \frac{2\pi}{3}$.



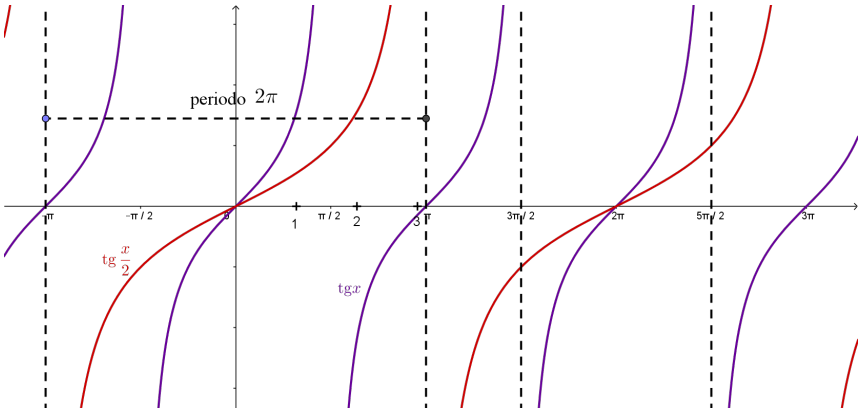
8. Si $g_3(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$, el periodo es $T = 4\pi$.



9. Si $g_4(x) = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$ entonces

$$g_4(x + 2\pi) = \mathrm{tg}(\frac{x + 2\pi}{2}) = \mathrm{tg}(\frac{x}{2} + \pi) = \mathrm{tg}(\frac{x}{2}) = g_2(x)$$

Luego $g_4(x)$ tiene periodo 2π



11.4. Ejercicios

1. Hallar en forma exacta (reducir al primer cuadrante y usar la tabla de valores exactos) para calcular los valores de las funciones seno y coseno:

   a) $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{4})$ b) $\operatorname{sen}(\frac{5\pi}{4})$ c) $\operatorname{sen}(\pi - \frac{\pi}{6})$

   d) $\cos(\pi + \frac{\pi}{6})$ e) $\cos(2\pi - \frac{\pi}{6})$ f) $\cos(\frac{5\pi}{4})$

2. Completar la siguiente tabla calculando los valores en forma exacta. Usar la tabla de valores exactos 11.1 y Reducción al primer cuadrante.

ángulo	seno	coseno	tangente
$2\pi/3$			
$3\pi/4$			
$5\pi/6$			
$7\pi/6$			
$5\pi/4$			
$7\pi/4$			
$-\pi/6$			
$-\pi/4$			

3. $\otimes$ $\odot$ En el mismo gráfico representar las funciones siguientes y determinar dominio e imagen:

   $s_1(x) = \operatorname{sen} x$ $s_2(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ $s_3(x) = 3 \operatorname{sen} x$ $s_4(x) = \operatorname{sen}(x + \pi)$

4. $\otimes$ $\odot$ Trazar las gráficas de las funciones siguientes. En cada caso estudiar para que valores de x la función vale 0, 1 y -1 y cuál es el periodo de cada función.

   a) $g_1(x) = \cos 2x$ b) $g_2(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ c) $g_3(x) = \cos \pi x$

   d) $g_4(x) = |\operatorname{tg} x|$ e) $g_5(x) = |\operatorname{sen} x|$ f) $g_6(x) = -2 \operatorname{sen}(x)$

   g) $g_7(x) = 4 \cos(2x)$ $g_8(x) = |\cos x|$

5. $\bigotimes$ $\bigodot$ Graficar las funciones :

$$g(x) = \begin{cases} 2\ \cos\ x & \text{si } x \leq -\pi \\ \operatorname{sen} x & \text{si } -\pi < x < \pi \\ \operatorname{sen}(2x) & \text{si } \pi \leq x \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{si } x \leq -2\pi \\ |\operatorname{sen} x| & \text{si } -2\pi < x < 2\pi \\ |\cos(2x)| & \text{si } 2\pi \leq x \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{si } x \leq -2 \\ -\operatorname{sen}(\pi x) & \text{si } -2 < x < 0 \\ \operatorname{tg}(x) & \text{si } 0 \leq x \end{cases} \qquad u(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1 \\ 3\cos(2\pi x) & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ |x-2| & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Aclaración: *La mayoría de los ejercicios pueden verificarse utilizando software del siguiente modo:*

Los señalados con $\bigotimes$ *pueden resolverse utilizando un software de matemática dinámica.*

Los señalados con $\bigodot$ *pueden resolverse utilizando software de algebra computacional.*

En el Anexo que aparece al final del libro se dan pautas sobre los programas recomendados para cada caso.

Capítulo 12

Límite y Continuidad

12.1. Límite

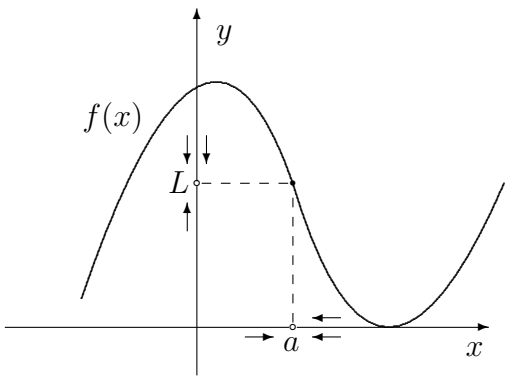
12.1.1. Definición (informal)

La función f tiende hacia el límite L cerca de a, si se puede hacer que $f(x)$ esté tan cerca como queramos de L haciendo que x esté suficientemente cerca de a, pero siendo distinto de a. La forma de escribir esta afirmación es:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se lee: límite cuando x tiende a a de la función $f(x)$ es igual a L

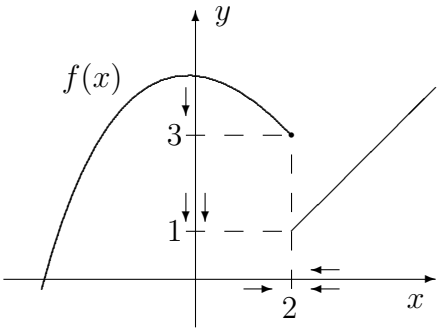
En el siguiente gráfico se muestra la situación.



Cuando los valores de x están muy cerca de a tanto a la derecha (la doble flecha indica que se toman valores de $x > a$) como a la izquierda (la flecha indica que se toman valores de $x < a$) los valores de $f(x)$ se acercan a L sin importar si está definido $f(a)$ o cual es su valor.

12.1.2. Límites laterales

Consideremos la gráfica de una función que se comporta del modo siguiente:



Cuando los valores de x están muy cerca de 2 pero a la derecha (doble flecha) de 2 los valores de $f(x)$ se acercan a 1.
En cambio, cuando los valores de x están muy cerca de 2 pero a la izquierda (una flecha) de 2 los valores de $f(x)$ se acercan a 3.

Utilizamos la siguiente notación para estos casos

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

Estas expresiones se leen del siguiente modo: límite cuando x tiende a 2 por la derecha de la función $f(x)$ es igual a 1 y límite cuando x tiende a 2 por la izquierda de la función $f(x)$ es igual a 3

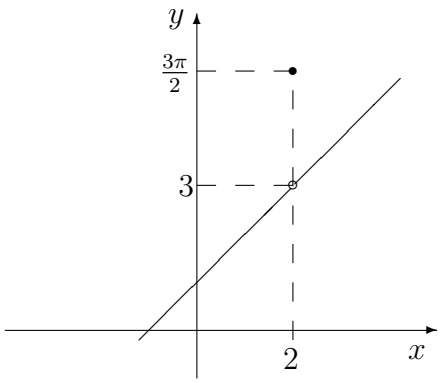
Cuando **los límites por derecha y por izquierda son distintos** se dice que **no existe** $\lim_{x \to 2} f(x)$

Ejemplo: Dada la función

$$\begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq 2 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Determinar si existe $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

El gráfico de $g(x)$:



Analizamos el comportamiento de $g(x)$ cuando x se acerca a 2

Cuando los valores de x están muy cerca de 2 pero a la derecha de 2 los valores de $g(x) = x + 1$ se acercan a 3.

Cuando los valores de x están muy cerca de 2 pero a la izquierda de 2 los valores de $g(x) = x + 1$ también se acercan a 3.

La escritura formal para este caso es:

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} x + 1 = 3 \qquad \lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} x + 1 = 3$$

En este caso los límites por derecha y por izquierda en 2 son iguales, entonces se dice que

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 3$$

Observar que el valor del límite no depende de la imagen de la función en el punto ya que $g(2) = \frac{3\pi}{2}$

12.1.3. Límites cuando la variable independiente tiende a infinito

Diremos que x tiende a mas infinito cuando toma valores positivos "muy grandes" y lo escribiremos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

Diremos que x tiende a menos infinito cuando toma valores negativos, que considerados en valor absoluto son "muy grandes" y lo escribiremos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Tiene sentido, también, que el resultado de un límite sea $+\infty$ o $-\infty$ como lo veremos en la siguiente sección.

Ejemplos:

1. Dada la función $g(x) = \dfrac{1}{x}$ Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

   a) Cuando x toma valores "muy grandes" positivos, los valores de $g(x)$ son positivos y se acercan a 0. En este caso se escribe: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

   b) Cuando x toma valores "muy grandes" negativos, los valores de $g(x)$ son negativos y se acercan a 0. En este caso se escribe: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

2. Si $h(x) = 3 + \dfrac{1}{x^2}$ Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$
   Cuando x toma valores "muy grandes" tanto positivos como negativos, los valores de $\dfrac{1}{x^2}$ son positivos y se acercan a 0. Luego los valores de $h(x)$ se acercan a 3. Se escribe: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 + \dfrac{1}{x^2} = 3$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \dfrac{1}{x^2} = 3$

12.1.4. Límites cuando la función tiende a infinito

Tienen sentido las expresiones:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

En el primer caso: cuando x se acerca a a y $f(x)$ toma valores positivos "muy grandes"se dice que la función tiende a mas infinito

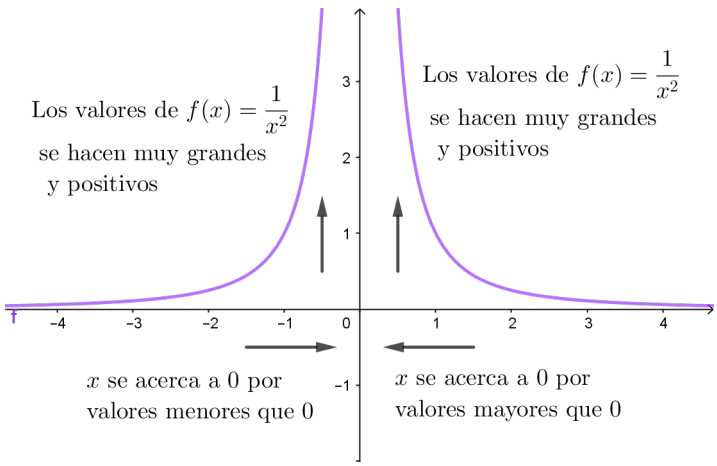
En el segundo caso: cuando x se acerca a a y $f(x)$ toma valores negativos con valor absoluto "muy grande"se dice que la función tiende a menos infinito.

Ejemplos:

1. Consideremos el comportamiento cerca de 0 de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

   Cuando x toma valores cercanos a 0 pero a la derecha de 0 los valores de $\dfrac{1}{x^2}$ se hacen muy grandes y positivos.
   Entonces: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

   Cuando x toma valores cercanos a 0 pero a la izquierda de 0 los valores de $\dfrac{1}{x^2}$ se hacen muy grandes y positivos.
   Entonces: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$



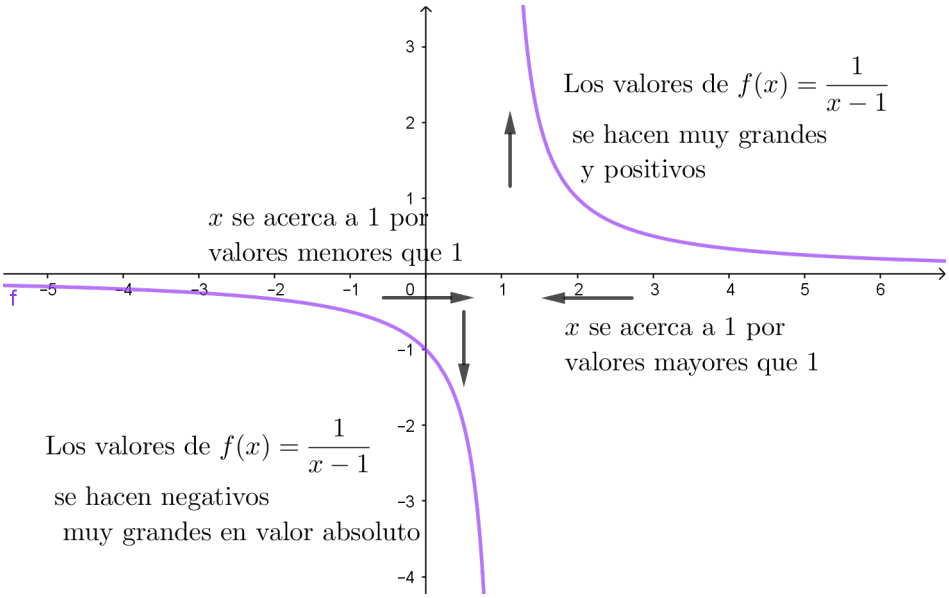
2. Consideremos el comportamiento cerca de 1 de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

   Cuando x toma valores cercanos a 1 pero a la derecha de 1 los valores de $\dfrac{1}{x-1}$ se hacen muy grandes y positivos.

   Entonces: $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

   Cuando x toma valores cercanos a 1 pero a la izquierda de 1 los valores de $\dfrac{1}{x-1}$ se hacen muy grandes considerados en valor absoluto pero negativos.

   Entonces: $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$



12.1.5. Propiedades

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ y k es un número real entonces:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = L + M$

2. $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x) = kL$

3. $\lim\limits_{x \to a} f(x).g(x) = L.M$

4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ si $M \neq 0$

Ejemplos: Puesto que $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{4}$ $\qquad \lim\limits_{x\to -2} x^3 = -8$

1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{x^2} + x^3 = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{x^2} + \lim\limits_{x\to -2} x^3 = \dfrac{1}{4} + (-8) = -\dfrac{31}{4}$

2. $\lim\limits_{x\to -2} 3\dfrac{1}{x^2} = 3 \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{x^2} = 3\,\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

3. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{x^2}.x^3 = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{x^2}.\ \lim\limits_{x\to -2} x^3 = \dfrac{1}{4}.(-8) = -2$

4. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3}{x^2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to -2} x^3}{\lim\limits_{x\to -2} x^2} = \dfrac{-8}{4} = -2$

5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+2}{x^2 - x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to -1} x + \lim\limits_{x\to -1} 2}{\lim\limits_{x\to -1} x^2 - \lim\limits_{x\to -1} x} = \dfrac{1}{2}$

12.1.6. Límites indeterminados

Si $\lim\limits_{x\to a} n(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} d(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{n(x)}{d(x)}$ se dice que es **indeterminado** y puede existir o no.

Para resolver esta situación se usan algunos argumentos algebraicos. Este tipo de límite es de mucha importancia ya que la definición de derivada que daremos en el capítulo siguiente se apoya en esto.

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+3} = \frac{4}{5}$$

Si $\lim\limits_{x\to a} n(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a} d(x) = \infty$ entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{n(x)}{d(x)}$ también es **indeterminado** y puede existir o no. Por ejemplo:

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x^3 + 4x^2 - 2x}{x^3 - x^2 + 5} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3\left(-3 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x^3}\right)} =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}} = -3$$

2. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2+4x-2}{x^3-x^2+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(-3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{x\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}\right)} = 0$$

3. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^4+4x}{x^3-x^2+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4\left(-3+\dfrac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-3+\dfrac{4}{x^3}\right)}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}} = +\infty$$

4. Si $\lim\limits_{x\to a} n(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a} d(x) = \infty$ entonces $\lim\limits_{x\to a}(n(x)-d(x))$ es **indeterminado** y puede existir o no.

   Si $\lim\limits_{x\to a} n(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a} d(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} n(x)d(x)$ es **indeterminado** y puede existir o no.

   Las técnicas de resolución requieren ciertas maniobras algebraicas elementales.

Hay otras indeterminaciones que no consideraremos en este libro.

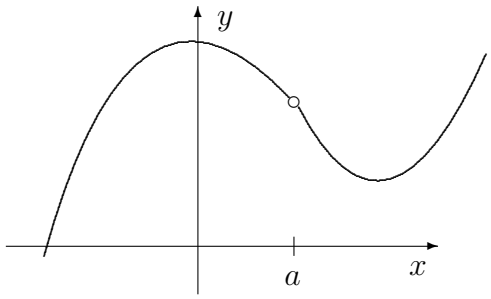
12.2. Funciones Continuas

Si f es una función cualquiera, no se cumple necesariamente que:

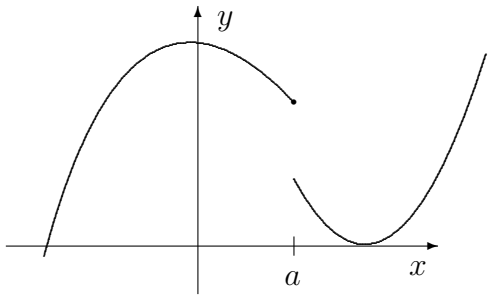
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

En efecto, esto puede dejar ser cierto de muchas maneras:

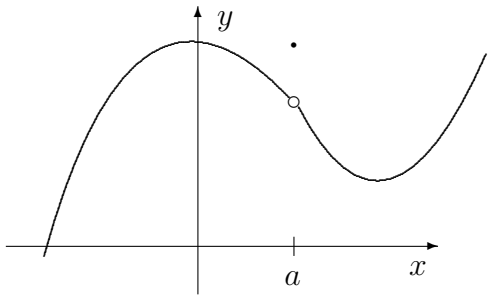
1. f puede no estar definida en a, en cuyo caso la igualdad no tiene sentido. Gráficamente tenemos:



2. También puede no existir $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.



3. Finalmente, aún estando definida f en a y existiendo $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, el límite puede no ser igual a $f(a)$.



Parece natural considerar como "anormal" todo comportamiento de estos tipos y distinguir a aquellas funciones que no presenten estas peculiaridades.

A las funciones que se comportan de modo "normal" se las denomina **continuas**.

Intuitivamente, una función es continua si su gráfica no contiene interrupciones, ni saltos.

12.2.1. Definición

La función $f(x)$ es continua en $x = a$ si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Otra forma de definir la continuidad de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ es pedir que se cumplan las tres condiciones siguientes:

1. $f(a)$ está definida, es decir, a está en el dominio de f.
2. Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$
3. $L = f(a)$

12.2.2. Propiedades

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = a$ y k es un número real, entonces:

1. $kf(x)$ es continua en a
2. $f(x) + g(x)$ es continua en a
3. $f(x).g(x)$ es continua en a
4. Además, si $g(a) \neq 0$, entonces $f(x)/g(x)$ es continua en a

12.2.3. Función continua en un intervalo

Si f es continua para todo x de un intervalo (a, b), entonces se dice que f es continua en (a, b).

Consideremos los casos:

1. Las funciones constantes $f_1(x) = c$ son continuas en todo su dominio.

2. Las funciones $f_2(x) = x^n$ (donde n es entero positivo) son continuas en todo su dominio.

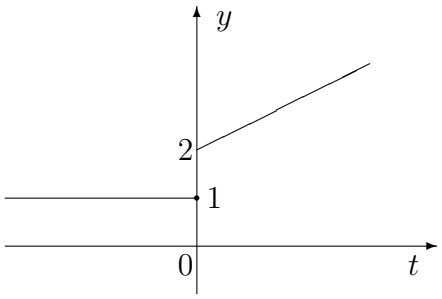
3. Por 1. y 2. y las propiedades de las funciones continuas, las funciones polinómicas: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ son continuas en todo su dominio.

4. Las funciones seno y coseno son continuas en todos los números reales.

5. La función tangente es continua salvo en los puntos en los que no está definida, estos son: $(\ldots - \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots)$

Ejemplo: Analizar la continuidad de la función

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{2}t + 2 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$



Para los valores de $t < 0$, está definida como una función constante, luego es continua.

Para los valores de $t > 0$ es una función polinómica (en este caso es lineal), luego es continua.

Para $t = 0$:

$w(0) = 1$ la función está definida en 0.

$\lim\limits_{t\to 0^+} w(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{2}t + 2\right) = 2$

$\lim\limits_{t\to 0^-} w(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} 1 = 1$

El $\lim\limits_{t\to 0} w(t)$ no existe, por lo tanto $w(t)$ no es continua en $t = 0$

La función $w(t)$ es continua en todos los números reales salvo en $t = 0$

12.2.4. Redefinición de una función en un punto

Si una función $f(x)$ no está definida en $x = a$ pero existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ entonces puede redefinirse para que sea continua.

Consideremos la siguiente situación: la función

$$g(x) = \frac{16x - x^3}{3x - 12}$$

no está definida en donde se anula el denominador, es decir en el punto $x = 4$. Luego, no puede ser continua en dicho punto. Para ver si es posible redefinirla, debemos ver si existe $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$:

$$\lim_{x\to 4} g(x) = \lim_{x\to 4} \frac{16x - x^3}{3x - 12} = \lim_{x\to 4} \frac{x(16 - x^2)}{3(x - 4)} = \lim_{x\to 4} \frac{x(4 - x)(4 + x)}{3(x - 4)} =$$

$$= \lim_{x\to 4} -\frac{x(x - 4)(4 + x)}{3(x - 4)} = \lim_{x\to 4} -\frac{x(4 + x)}{3} = -\frac{32}{3}$$

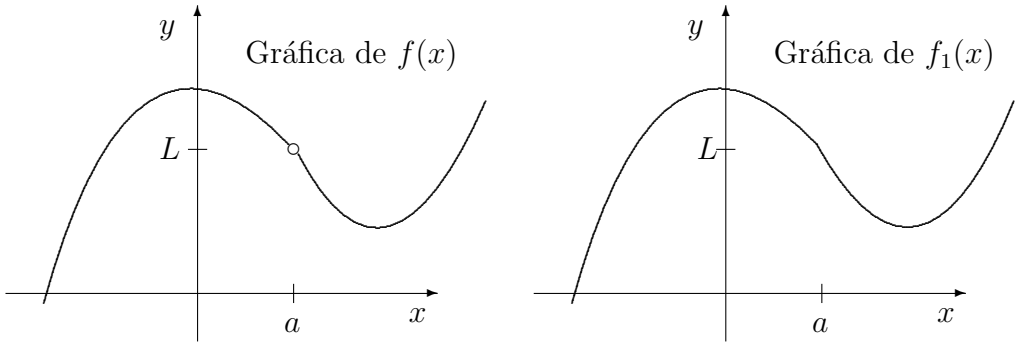
La función redefinida en el punto $x = 4$ es una función $g_1(x)$ que es continua en dicho punto:

$$g_1(x) = \begin{cases} \frac{16x - x^3}{3x - 12} & \text{si } x \neq 4 \\ \\ -\dfrac{32}{3} & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

En general:

Si $f(x)$ no está definida en $x = a$ (es decir, a no pertenece al dominio de f y por lo tanto no es continua en a), pero existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ entonces puede redefinirse de modo que sea continua en a:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \\ L & \text{si } x = a \end{cases}$$



Por último si una función $f(x)$ está definida en $x = a$, existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $f(a) \neq L$ entonces puede redefinirse la función para que sea continua en $x = a$ utilizando la idea anterior.

12.3. Ejercicios

1. $\bigotimes$ $\bigodot$ Dada la función:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 1 \\ \\ x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Graficarla. Representar en el gráfico: $g(0)$, $g(0{,}5)$, $g(0{,}8)$, $g(0{,}9)$, $g(0{,}95)$, $g(0{,}99)$. Observar a que valor se acerca $g(x)$ cuando x se acerca a 1 por valores menores que 1.

2. $\otimes$ $\odot$ Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x > 2 \\ \\ x - 1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

Graficarla. Representar en el gráfico: $f(2{,}5)$, $f(2{,}3)$, $f(2{,}2)$, $f(2{,}1)$, $f(2{,}01)$, $f(2{,}001)$. Observar a que valor se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a 2 por valores mayores que 2.

3. $\otimes$ $\odot$ Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x > 1 \\ \\ 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Graficarla. Representar en el gráfico: $f(1{,}5)$, $f(1{,}3)$, $f(1{,}2)$, $f(1{,}1)$, $f(1{,}01)$, $f(1{,}001)$. $f(0{,}5)$, $f(0{,}8)$, $f(0{,}9)$, $f(0{,}99)$. Observar a que valor se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a 1 por valores mayores que 1 y a que valor se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a 1 por valores menores que 1.

4. $\otimes$ $\odot$ Dada la siguiente función: $h(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Representar en el gráfico: $h(0{,}3)$, $h(0{,}5)$,
$h(0{,}2)$, $h(0{,}1)$, $h(0{,}01)$, $h(-0{,}4)$, $h(-0{,}2)$, $h(-0{,}1)$, $h(-0{,}01)$. Observar a que valor se acerca $h(x)$ cuando x se acerca a 0 por valores menores que 0 y a que valor se acerca $h(x)$ cuando x se acerca a 0 por valores mayores que 0.

5. $\otimes$ $\odot$ Estudiar si existe $\lim\limits_{t \to 0} f(t)$ y graficar:

a) $f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$ b) $f_2(t) = \begin{cases} -t & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$

c) $f_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \\ t & \text{si } t > 0 \end{cases}$ d) $f_4(t) = \begin{cases} -t & \text{si } t \leq 0 \\ t^2 & \text{si } t > 0 \end{cases}$

6. $\bigotimes$ $\bigodot$ Estudiar si existen los siguientes límites, en cada caso realizar un gráfico:

1) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \\ 3 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 9 & \text{si } x \geq 2 \\ 2x & \text{si } x < 2 \end{cases}$

2) $\lim\limits_{z \to -1} G(z)$

$G(z) = \begin{cases} z^3 + 2 & \text{si } z \leq -1 \\ -2z - 4 & \text{si } z > -1 \end{cases}$ $G(z) = \begin{cases} 2z^2 - 2 & \text{si } z \geq -1 \\ \cos z & \text{si } z < -1 \end{cases}$

7. $\bigotimes$ $\bigodot$ Calcular los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t+4}{t+5}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} 2x^2 - 1$ c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ f) $\lim\limits_{y \to -3} \dfrac{y^2 + 4y + 3}{y + 3}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$ h) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$ i) $\lim\limits_{y \to 1} \dfrac{y^3 - 1}{y - 1}$

j) $\lim\limits_{z \to 4} \dfrac{z^2 - 16}{z^3 - 6z^2 + 8z}$ k) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{a + h} - \sqrt{a}}{h}$ l) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3 - \sqrt{8 + x}}{x - 1}$

8. $\otimes$ $\odot$ Calcular, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{2t+4}{t+5}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^2+4x-2}{3x^2+5}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^2+2x}{3x-4}$ e) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{6}{x^2-9}$ f) $\lim\limits_{t\to-1} \dfrac{2}{(t+1)^4}$

g) $\lim\limits_{y\to5} \dfrac{-1}{(y^2-25)^2}$ h) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^5-1}{t^4-1}$ i) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-4}{x^2-4} - \dfrac{1}{x+2}$

j) $\lim\limits_{t\to1} \dfrac{2t-2}{(t-1)^3}$ k) $\lim\limits_{y\to3} \dfrac{9-3y}{y^2-6y+9}$ l) $\lim\limits_{t\to-\pi/2} \operatorname{tg} t$

9. $\otimes$ $\odot$ Mostrar que las siguientes funciones son discontinuas en los puntos que se especifican. En los casos en que sea posible redefinir adecuadamente la función para que sea continua.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-4} & \text{si } x \neq 4 \\ -\frac{6}{7} & \text{si } x = 4 \end{cases}$ en $x = 4$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x \neq 5 \\ \pi & \text{si } x = 5 \end{cases}$ en $x = 5$

10. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en todo su dominio y graficarlas:

a) $f_1(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f_2(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f_3(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

d) $f_4(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \sqrt{1-x} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

e) $f_5(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

f) $f_6(x) = \begin{cases} 2 \cos x & \text{si } x \leq -\pi \\ \operatorname{sen} x & \text{si } -\pi < x < \pi \\ \operatorname{sen}(2x) & \text{si } \pi \leq x \end{cases}$

11. Se deposita un capital de \$10000 a un plazo fijo de 30 días a un interés anual del 6 %. Se renueva 8 veces, dejando en cada oportunidad los intereses producidos.
    Graficar la evolución del monto obtenido en función del tiempo.

12. Si se deposita el mismo capital a un plazo fijo de 45 días a un interés anual del 6 %. Se renueva 5 veces, dejando en cada oportunidad los intereses producidos.
    Graficar la evolución del monto obtenido en función del tiempo.
    Comparar estos resultados con los del ejercicio anterior.

Aclaración: *La mayoría de los ejercicios pueden verificarse utilizando software del siguiente modo:*
Los señalados con $\bigotimes$ *pueden resolverse utilizando un software de matemática dinámica.*

Los señalados con $\odot$ *pueden resolverse utilizando software de algebra computacional.*

En el Anexo que aparece al final del libro se dan pautas sobre los programas recomendados para cada caso.

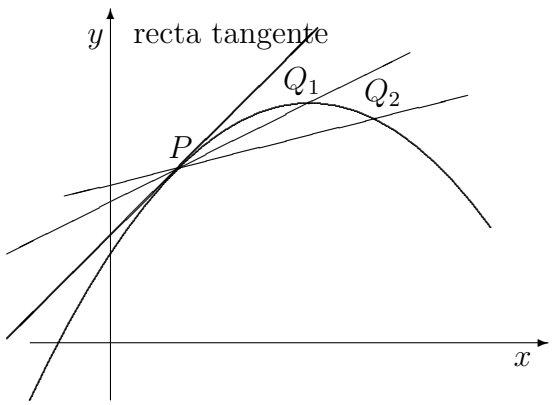
Capítulo 13

Derivada

13.1. Pendiente de la recta tangente a una curva

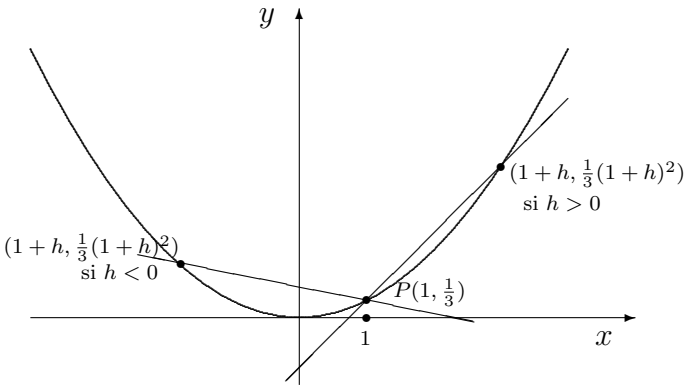
13.1.1. Definiciones básicas

Dada una curva que es la gráfica de una función $f(x)$ y sea P un punto sobre la curva. La pendiente de la recta tangente a la curva en P es el valor al que se van aproximando las pendientes de las rectas que pasan por P y otro punto Q sobre la curva, a medida que Q se acerca a P.



Ejemplo: Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^2$. Queremos determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $(1, \frac{1}{3})$.

En general, la abscisa de un punto cercano a $(1, \frac{1}{3})$ se puede escribir como $1 + h$, donde h es algún número pequeño, positivo o negativo distinto de 0 $f(1 + h) = \frac{1}{3}(1 + h)^2 = \frac{1}{3}(1 + 2h + h^2)$, entonces el punto $(1 + h, \frac{1}{3}(1 + h)^2)$ está sobre la curva.



Si $h > 0$ entonces $1 + h$ está a la derecha de 1.

Si $h < 0$ entonces $1 + h$ está a la izquierda de 1.

En cualquiera de los dos casos la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1, \frac{1}{3})$ y $(1 + h, \frac{1}{3}(1 + h)^2)$ es:

$$\frac{\frac{1}{3}(1 + 2h + h^2) - \frac{1}{3}}{(1 + h) - 1} = \frac{\frac{1}{3}(2h + h^2)}{h} = \frac{1}{3}(2 + h) \quad \text{ya que } \ h \neq 0$$

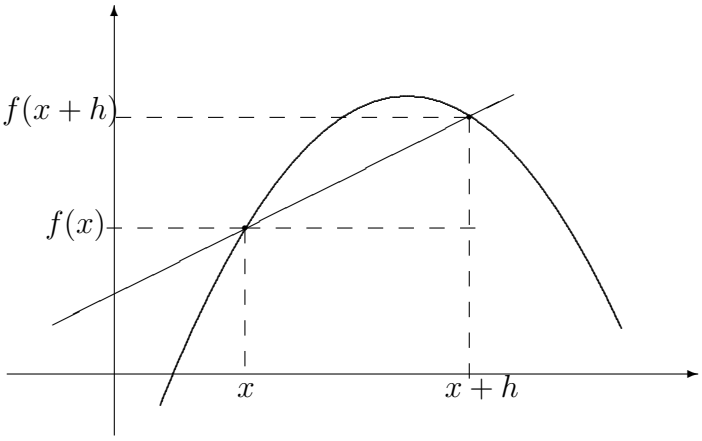
A medida que el número h tiende a cero (es decir, que h es un número que se va acercando a 0), el punto $Q(1 + h, \frac{1}{3}(1 + 2h + h^2))$ se acerca al punto $P(1, \frac{1}{3})$. Cuando h tiende a cero, las pendientes de las rectas que pasan por P y Q se van acercando a $\frac{2}{3}$. Luego, pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P(1, \frac{1}{3})$ es $\frac{2}{3}$.

13.1.2. Cociente de Newton

Dada una función $f(x)$, su cociente de Newton es:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$



En el caso del ejemplo anterior el cociente de Newton en el punto $(1, \frac{1}{3})$ es:

$$\frac{\frac{1}{3}(1+h)^2-\frac{1}{3}}{h}=\frac{1}{3}(2+h)$$

El cociente de Newton en un punto cualquiera $(x, f(x))$ es

$$\frac{\frac{1}{3}(x+h)^2-\frac{1}{3}x^2}{h}=\frac{\frac{1}{3}h(2x+h)}{h}=\frac{1}{3}(2x+h)$$

13.2. Derivada de una función

Si el cociente de Newton se acerca a un valor cuando h tiende a 0, entonces se define la **función derivada** de f en x como este límite esto es:

$$f'(x)=\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

donde $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ es el valor al que se acerca el cociente de Newton cuando h se aproxima a 0.
Tanto $f'(x)$ como $\dfrac{df}{dx}$ se leen **derivada de f respecto de x**

13.2.1. Interpretación geométrica. Recta tangente

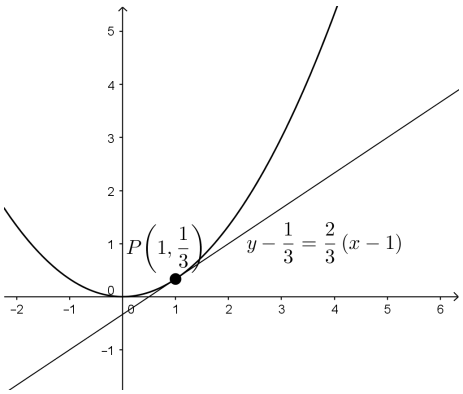
La **derivada de una función en un punto** $x = a$, es decir $f'(a)$, es la **pendiente de la recta tangente a la gráfica** de la función en $(a, f(a))$. De lo anterior se desprende que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $(a, f(a))$ es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Volviendo al ejemplo de la sección (13.1.1)

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2$ en el punto $(1, \dfrac{1}{3})$es:

$$y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(x - 1)$$



13.2.2. Derivabilidad

Una función f se dice **derivable** en c si existe $f'(c)$, es decir, existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Una función f se dice **derivable en un intervalo abierto** (a,b) ó $(a,+\infty)$ ó $(-\infty,a)$ ó $(-\infty,+\infty)$ si es derivable en todos los puntos del intervalo.

A continuación consideremos las derivadas de algunas funciones

1. Analizar en que puntos la función

   $$u(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases} \text{ es derivable}$$

   $u(x)$ (función valor absoluto) tiene por dominio a todos los números reales.

   Para valores de x en $(0,+\infty)$ la derivada existe y es $u'(x)=1$.
   Para valores de x en $(-\infty,0)$ la derivada existe y es $u'(x)=-1$
   Pero veamos que no existe la derivada para $x=0$:

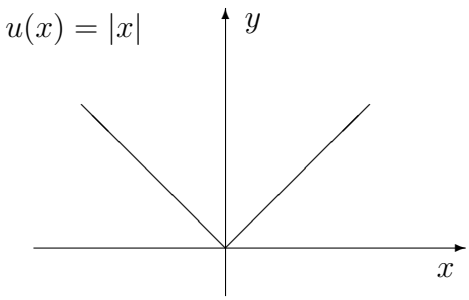
   $$\lim_{h\to 0^+} \frac{u(0+h)-u(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

   $$\lim_{h\to 0^-} \frac{u(0+h)-u(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

   Como los límites para $h\to 0$ por derecha y por izquierda son distintos, entonces no existe $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(0+h)-u(0)}{h}$ y la función *no es derivable* en $x=0$

   Luego la derivada de $u(x)$ es:

$$u'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



2. La derivada de una función constante es 0.

   Si $f(x) = c$ donde c es un número real cualquiera, entonces $f(x+h) = c$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

3. Si n es un número entero $n \geq 1$.

   La derivada de $f(x) = x^n$ es

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

   Demostración:

$$f(x+h) = (x+h)^n = (x+h)(x+h)(x+h)\cdots(x+h)$$

   donde el factor $(x+h)$ aparece n veces.

   Si desarrollamos el producto usando la propiedad distributiva, observamos que aparece el término x^n y también, si tomamos x de todos los factores excepto de uno obtenemos hx^{n-1} repetido n veces, esto da un término $nx^{n-1}h$.

   En los restantes términos aparecerá h seleccionado de al menos dos

factores, luego en todos habrá potencias de h desde h^2 hasta h^n. Por lo tanto h^2 será factor común de todos ellos.

$$f(x+h) = (x+h)^n = (x+h)(x+h)(x+h)\cdots(x+h) =$$

$$= x^n + hnx^{n-1} + h^2.(\text{términos dependientes de } h \text{ y de } x)$$

Entonces:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x^n + hnx^{n-1} + h^2.(\text{términos dependientes de } h \text{ y de } x) - x^n}{h} =$$

$$= \frac{hnx^{n-1} + h^2.(\text{términos dependientes de } h \text{ y de } x)}{h} =$$

$$= \frac{h(nx^{n-1} + h.(\text{términos dependientes de } h \text{ y de } x))}{h} =$$

$$= nx^{n-1} + h.(\text{términos dependientes de } h \text{ y de } x)$$

Luego:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + h.(\text{términos dependientes de } h \text{ y de } x))$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

4. Si n es un número racional cualquiera también vale que si $f(x) = x^n$ (sin demostración):

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

5. Derivadas de las funciones trigonométricas (sin demostración):

   Si $S(x) = \operatorname{sen} x \qquad S'(x) = \cos x$

   Si $C(x) = \cos x \qquad C'(x) = -\operatorname{sen} x$

   Las funciones $S(x)$ y $C(x)$ son derivables para todos los números reales.

Ejemplos

1. Si $f(x) = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3} \qquad f'(x) = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$

   La función $f(x)$ es derivable en todo su dominio (todos los números distintos de cero).

2. Si $h(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ $\qquad h'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x}^3}$

   El dominio de $h(x)$ es el conjunto $[0, +\infty)$. La función $h(x)$ es derivable es el conjunto $(0, +\infty)$.

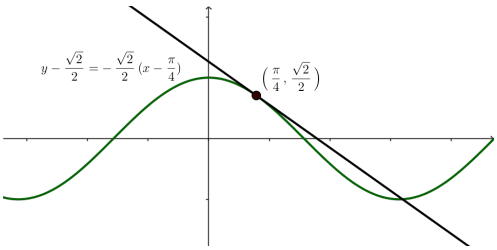
3. Si $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}^4} = x^{-\frac{4}{3}}$ $\qquad g'(x) = -\dfrac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}} = -\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^7}}$

   La función $g(x)$ es derivable en todo su dominio (todos los números distintos de cero).

4. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $C(x) = \cos x$ en el punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

   La recta tangente tiene pendiente $C'(\frac{\pi}{4})$ y pasa por el punto $(\frac{\pi}{4}, C'(\frac{\pi}{4}))$

   Puesto que
   $$C'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
   y que
   $$C\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
   la ecuación de la recta tangente es: $\quad y - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x - \dfrac{\pi}{4})$



13.2.3. Propiedades de la función derivada (reglas de derivación)

1. Sea f una función con derivada $f'(x)$. Entonces f es continua en x.

2. La derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función.

$$(cf(x))' = c.f'(x)$$

3. La derivada de una suma es la suma de las derivadas.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

4. La derivada de un producto está dada por la fórmula:

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

5. Sea $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones que tiene derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ respectivamente y tales que $g(x) \neq 0$. Entonces la derivada del cociente $f(x)/g(x)$ existe y es igual a:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Ejemplos

1. Puesto que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos\ x}$ su función derivada es:

$$\Big(\operatorname{tg} x\Big)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos\ x - \operatorname{sen} x(\cos\ x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2. Hallar la ecuación de la recta tangente a $U(t) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}$ en el punto de abscisa $t = \frac{\pi}{4}$:

$$U'(t) = \frac{(1)' \operatorname{sen} t - (\operatorname{sen} t)'}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}$$

La pendiente de la recta tangente es $m = U'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}/\frac{1}{2} = \sqrt{2}$

La ecuación de la recta tangente a la curva en $t = \frac{\pi}{4}$ es

$$y - \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(t - \frac{\pi}{4})$$

13.2.4. Razón de cambio

Dada una función $f(x)$ si x cambia de x_1 a x_2 llamaremos:

incremento en x o cambio en x: $\Delta x = x_2 - x_1$

y el **incremento en** y o cambio en y: $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

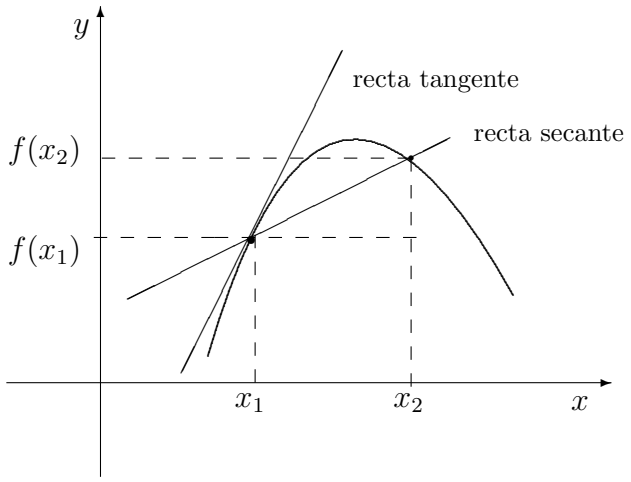
El cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

se llama **razón de cambio promedio** de y con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la recta secante.

La **razón de cambio instantáneo** en x_1 es la pendiente de la recta tangente en x_1

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Razón de cambio en Física:

Una partícula se mueve a lo largo de cierta recta una distancia que depende del tiempo t. Entonces la distancia s es una función de t, que escribimos $s = f(t)$. Para dos valores del tiempo t_1 y t_2, el cociente:

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_2 - t_1}$$

se puede considerar como la rapidez promedio de la partícula. En un tiempo dado t_0 es razonable considerar el límite

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

como la razón de cambio de s respecto a t en el tiempo t_0. Esto no es mas que la derivada $f'(t)$ que se llama **rapidez o velocidad escalar** y se denota por $v(t)$.

Ejemplo

La posición de una partícula está dada por la función $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ donde t se mide en segundos y s en metros.

¿Cuál es la velocidad en el instante t?

La función velocidad es la derivada de la función posición:

$v(t) = f'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

¿Cuál es la velocidad a los 2 segundos?

Esto significa calcular la velocidad instántanea cuando $t = 2$, es decir:

$v(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3$m/seg.

¿En que momento la partícula está en reposo?

La partícula se encuentra en reposo en el tiempo t en que la velocidad es 0 o sea cuando: $\quad v(t) = 0$

$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t-1)(t-3) = 0$

esto se cumple cuando $t = 1$ o $t = 3$.

Es decir que la partícula está en reposo en $t = 1$ segundos y en $t = 3$ segundos.

13.3. Derivadas de orden superior

Dada una función f definida en un intervalo su derivada f' es también una función en ese intervalo. Si sucede que también es derivable entonces su derivada se llama segunda derivada de f y se denota por $f''(x)$. De este

modo puede seguirse también con la derivada tercera, cuarta, etc. siempre que existan.

Notación: $f^{(n)}(x)$ es la derivada n-ésima de f.

Derivada primera y segunda en Física

Si una partícula se mueve a lo largo de cierta recta una distancia que depende del tiempo t entonces la distancia s es una función de t que escribimos $s(t)$. La razón de cambio de s respecto a t es la derivada $s'(t)$

$$v(t) = s'(t)$$

La razón de cambio de la rapidez se llama **aceleración**. Así.

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Ejemplos

1. Hallar la derivada primera, segunda y tercera de:
   $g(x) = 4\sqrt{x+3} = 4(x+3)^{1/2}$
   $g'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{x+3}} \qquad g''(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{(x+3)^3}} \qquad g'''(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{(x+3)^5}}$

2. Un objeto viaja sobre una recta una distancia dada por la función $s(t) = 2t^3 + t$. Determinar en que instante la rapidez es 7. Hallar la aceleración en el instante $t = 2$.
   $v(t) = s'(t) = 6t^2 + 1$ es la rapidez en cada instante t la rapidez es 7 en t tal que $6t^2 + 1 = 7$ es decir cuando $t = 1$
   $a(t) = v'(t) = 12t$ es la aceleración en cada instante t luego cuando $t = 2$ el valor de la aceleración es $a(2) = 24$.

3. La posición de una partícula está dada por la función

$$s = f(t) = 3\,\mathrm{sen}(t)$$

donde t se mide en segundos y s en metros.

¿Cuál es la velocidad en el instante t?

La función velocidad es la derivada de la función posición:

$$v(t) = f'(t) = 3\cos t$$

¿Cuál es la velocidad a los 2 segundos?

Esto significa calcular la velocidad instántanea cuando $t = 2$, es decir: $v(2) = 3\cos 2$ m/seg.

¿En que momento la partícula está en reposo?

La partícula se encuentra en reposo en el tiempo t en que la velocidad es 0 o sea cuando: $v(t) = 0$, es decir $3\cos t = 0$

y esto se cumple cuando $t = \frac{\pi}{2} + n\pi$ con n un número natural.

¿Cuál es la aceleración en el instante t?

La función aceleración es la derivada de la función velocidad:

$$a(t) = v'(t) = -3\operatorname{sen} t$$

Aplicación en Economía: Supongamos que $C(x)$ es el costo que tiene una empresa para producir x artículos. Si el número de artículos producidos se incrementa de x_1 a x_2, el costo adicional es $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, llamamos $\Delta x = x_2 - x_1$, y entonces la razón de cambio promedio del costo es:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

Los economistas llaman costo marginal al límite de esta cantidad cuando $\Delta x \to 0$, es decir, la razón instantánea de cambio del costo con respecto al número de artículos producidos:

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = C'(x) = \frac{dC}{dx}$$

A menudo se representa el costo total con un polinomio:
$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ donde a representa el costo de los gastos generales (impuestos, mantenimiento, calefacción, etc.) y b podría representar el costo de las materias primas, c y d podrían representar costos de mano de obra, de horas extras, etc.

En este caso, el costo marginal $C'(x) = b + 2cx + 3dx^2$

13.4. Derivada de la composición de funciones

13.4.1. Funciones Compuestas

Sean f y g dos funciones tales que f está definida en todos los números que son valores de g (f está definida para los números en la imagen de g), entonces se puede construir una nueva función denotada por $f \circ g$ cuyo valor en cada x es

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

la función $f \circ g$ se llama **función compuesta** de f y g.
Del mismo modo, si g está definida en todos los números que son valores de f entonces se puede construir $g \circ f$ cuyo valor en cada x es

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

En general la operación de composición entre dos funciones no es conmutativa. Es decir que $g \circ f \neq f \circ g$
Ejemplos

1. Consideremos $f(x) = x^4 + 1 \quad g(x) = x^6$ ambas tienen por dominio los números reales, entonces:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^6) = (x^6)^4 + 1 = x^{24} + 1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^4 + 1) = (x^4 + 1)^6$

Tanto $(f \circ g)(x)$ como $(g \circ f)(x)$ tendrán por dominio el conjunto de los números reales.

2. Consideremos $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = x^3$.

   Dom $f = [-2, +\infty)$ Dom $g = R$.

   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \sqrt{x^3 + 2}$, cuyo dominio será: $[\sqrt[3]{-2}, +\infty)$

   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+2}) = (\sqrt{x+2})^3$, cuyo dominio será: $[-2, +\infty)$

13.4.2. Regla de la cadena

Sean f y g dos funciones que tienen derivadas, y tales que f está definida en todos los números que son valores de g. Entonces la función compuesta $f \circ g$ tiene una derivada, dada por la fórmula llamada regla de la cadena

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

En el caso en que $y = f(x)$ es función de x y además x es función de t (digamos $x = g(t)$) entonces mediante la regla de la cadena podemos determinar la razón de cambio de y con respecto a t $(f(g(t)))' = f'(g(t))g'(t)$.

Ejemplos

1. Consideremos $f(x) = x^4 + 1$ $g(x) = x^6$ entonces:

   $f'(x) = 4x^3$ $g'(x) = 6x^5$

   $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = 4(g(x))^3 \cdot 6x^5 = 4(x^6)^3 \cdot 6x^5$

2. Si $H(x) = (7x + 4)^9$ $H(x)$ es la composición de dos funciones:

$u(x) = 7x + 4$ y $v(x) = x^9$ luego la derivada de $H(x)$ es

$H'(x) = 9(7x + 4)^8 \cdot 7$

3. Si $T(x) = \sqrt[4]{8x^3 - 3x^2} = (8x^3 - 3x^2)^{1/4}$
   $T'(x) = \frac{1}{4}(8x^3 - 3x^2)^{-3/4} \cdot (24x^2 - 6x) = \dfrac{24x^2 - 6x}{4\sqrt[4]{(8x^3 - 3x^2)^3}}$

4. Si $h(t) = 3\cos(2\pi t)$, su derivada es la función:

   $h'(t) = -6\pi \operatorname{sen}(2\pi t)$

   La ecuación de la recta tangente a la gráfica de h en $t_0 = \frac{1}{4}$ es

$$y - h\Big(\frac{1}{4}\Big) = h'\Big(\frac{1}{4}\Big)\Big(x - \frac{1}{4}\Big)$$

$$y = -6\pi\Big(x - \frac{1}{4}\Big)$$

5. Un cuadrado se expande de manera que su lado cambia a razón de 3 cm/seg. Hallar la razón de cambio de su área cuando el lado mide 6 cm de largo.
   La longitud del lado del cuadrado es una función del tiempo $L(t)$ y su razón de cambio es $L'(t) = 3$.
   El área del cuadrado como función del lado es $A(L) = L^2$, como la longitud del lado depende del tiempo, la razón de cambio del área con respecto al tiempo es la derivada de la función compuesta $A(L(t))$ es decir,

$$(A(L(t)))' = A'(L(t)) \cdot L'(t) = 2L(t) \cdot L'(t) = 2L(t) \cdot 3$$

   En el momento t_0 en que el lado mide 6 cm de largo, la razón de cambio del área será $2L(t_0) \cdot 3 = 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36$cm/seg.

13.5. Ejercicios

1. $\otimes$ $\odot$ Para la función $g(x) = \dfrac{1}{x}$

   a) Calcular $g(-1)$ y $g(-1+h)$

   b) Construir el cociente de Newton. Representar gráficamente la función y los puntos $P(-1, g(-1))$ y $Q_1(-1+h, g(-1+h))$ con $h > 0$ y $Q_2(-1+h, g(-1+h))$ con $h < 0$ (para realizar el gráfico considerar $h = \frac{1}{2}$ y $h = -\frac{1}{2}$)

   c) Representar en el gráfico anterior las rectas secantes que pasan por P y Q_1 y por P y Q_2

   d) Calcular el límite cuando h tiende a 0 del cociente de Newton.

   e) Calcular y representar en el mismo gráfico la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto P

2. $\otimes$ $\odot$ Dadas las funciones

   a) $f_a(x) = x^2 + 1$ b)$f_b(x) = x^3$ c)$f_c(x) = \dfrac{1}{x+1}$

   Usar las reglas de derivación para hallar:

   i. La función derivada.

   ii. La pendiente de la recta tangente en el punto cuya abcisa es -2

   iii. La ecuación de la recta tangente en ese punto.

3. $\otimes$ $\odot$ Usando las reglas de derivación hallar las derivadas de las funciones:

a) $k(x) = (2x-5)(3x^4+5x+2)$ b) $G(x) = (2\operatorname{tg} x + 3)(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x})$

c) $S(v) = \dfrac{2v+1}{v+5}$ d) $U(x) = \dfrac{2x}{x^2+3x+1}$

e) $f(t) = \dfrac{t^{-5/4}}{\cos t + t - 1}$

4. $\otimes$ $\odot$ Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de las funciones siguientes en el punto dado:

a) $f_a(x) = 2x^3 + 3$ en $x = \dfrac{1}{2}$ b) $f_b(t) = (t-1)(t-3)$ en $t = 0$

c) $f_c(x) = \operatorname{sen} x(2\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2})$ en $x = \frac{\pi}{4}$ d) $f_d(u) = \dfrac{u^2}{u^3+1}$ en $u = 2$

e) $f_e(x) = \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{x^2+1}$ en $x = \frac{\pi}{2}$ f) $f_f(t) = \dfrac{1-5t}{t}$ en $t = -1$

5. $\otimes$ $\odot$ Para la función $s(u) = \operatorname{sen} u$ determinar los puntos u en los cuales la derivada $s'(u) = 0$ y marcarlos en el gráfico.

6. $\otimes$ $\odot$ Mostrar que las gráficas de las ecuaciones: $y = 3x^2$ y $y = 2x^3 + 1$ tienen la recta tangente en común en el punto $(1, 3)$. Graficar.

7. $\otimes$ $\odot$ Mostrar que hay exactamente dos rectas tangentes a la gráfica de $y = (x+1)^2$ que pasan por el origen y hallar sus ecuaciones.

8. $\otimes$ $\odot$ Hallar la ecuación de la recta tangente a las gráficas de las funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ b) $g(x) = \cos(3x + 2\pi)$ en $x = \pi$.

9. $\otimes$ $\odot$ Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

a) $f_1(x) = (x+1)^6$ b) $f_2(x) = (2x-5)^{1/2}$ c) $f_3(x) = (2x^2+3)^3$

d) $f_4(x) = \dfrac{1}{(3x-4)^3}$ e) $f_5(x) = \cos(\operatorname{sen} 5x)$ f) $f_6(x) = \operatorname{sen}(x^2+5x)$

g) $f_7(x) = \sqrt{(x+1)^5}$ h) $f_8(x) = \cos^4((4x+2))$ i) $f_9(x) = \operatorname{sen}(3x^3+5x)$

10. $\otimes$ $\odot$ Hallar la segunda derivada de

a) $f(x) = 3x^3+5x-3$ b) $g(x) = (x^2+2)^5$ c) $s(z) = \cos(z^2-2)$

d) $f(t) = \cos(t^3+\pi)$ e) $h(u) = \operatorname{tg}(-4u-u^7)$ f) $F(x) = x\operatorname{sen}(x^2)$

11. $\otimes$ $\odot$ Hallar la derivada cuarta de

a) $y(t) = \cos t$ b) $u(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$

¿Cuál será la derivada de orden 25 de la función $y(t) = \cos t$?

¿Cuál será la derivada de orden 33 de la función $r(t) = \operatorname{sen} t$?

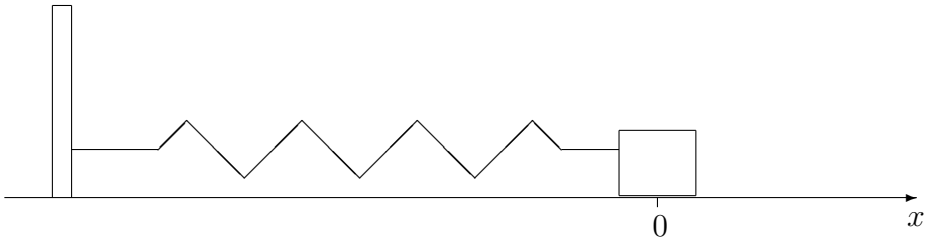
12. $\otimes$ $\odot$ Una partícula se mueve de modo que en el instante t la posición está dada por $s(t) = 3\operatorname{sen}(2t+\pi)$ Teniendo en cuenta que la partícula se mueve en el intervalo de tiempo $[0,\pi]$ ¿en que instantes la rapidez es igual a 0? ¿en que instante la aceleración es igual a 0?

13. $\otimes$ $\odot$ Un cuadrado se expande de manera que su lado cambia a razón de 2 cm/seg. Hallar la razón de cambio de su área cuando el lado mide 4 cm de largo.

14. $\otimes$ $\odot$ Un cubo se expande de manera que su lado está cambiando a razón de 5 m/seg. Hallar la razón de cambio de su volumen cuando su arista mide 4 m de longitud.

15. $\otimes$ $\odot$ Movimiento armónico simple. Consideremos un cuerpo que descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Se encuentra su-

jeto a un soporte mediante un resorte, si se lo aparta de su posición de equilibrio una distancia pequeña, oscila ejecutando lo que se conoce como movimiento armónico simple.



La posición del cuerpo en función del tiempo, tomando como origen el lugar donde el cuerpo se hallaba en equilibrio es:

$$x(t) = A \text{ sen } (2\pi f \ t)$$

donde A se llama amplitud del movimiento y f es la frecuencia del mismo (número de oscilaciones por unidad de tiempo).

a) Si $A = 5cm$ y $f = 2Hz$ (Hz: Hertz es la unidad de frecuencia y tiene dimensión física $1/seg$). Representar gráficamente para un intervalo de tiempo igual a 1 seg.

b) Calcular la velocidad en función del tiempo. Representar gráficamente $x(t)$ para un intervalo de tiempo igual a 1 seg.

c) Calcular la aceleración en función del tiempo. Representar gráficamente para un intervalo de tiempo igual a 1 seg.

d) Interpretar físicamente los resultados obtenidos.

Aclaración: *La mayoría de los ejercicios pueden verificarse utilizando software del siguiente modo:*
Los señalados con $\bigotimes$ *pueden resolverse utilizando un software de matemática*

dinámica.

Los señalados con $\odot$ *pueden resolverse utilizando software de algebra computacional.*

En el Anexo que aparece al final del libro se dan pautas sobre los programas recomendados para cada caso.

Capítulo 14

Extremos de una función

14.1. Funciones crecientes y decrecientes

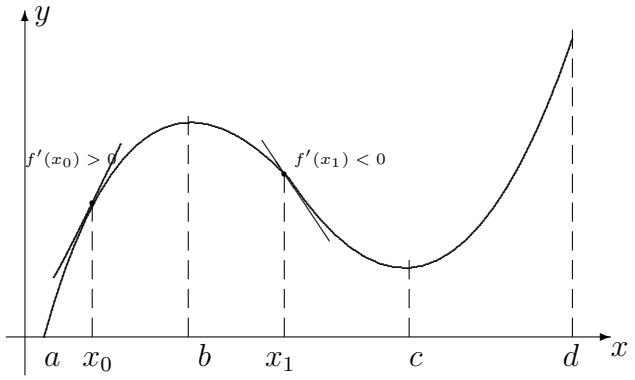
Se dice que una función f es **creciente** sobre un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I.$$

Se dice que una función f es **decreciente** sobre un intervalo I si

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I.$$

En la gráfica siguiente aparece una función que es creciente en el intervalo (a, b); decreciente en el intervalo (b, c) y creciente en (c, d)

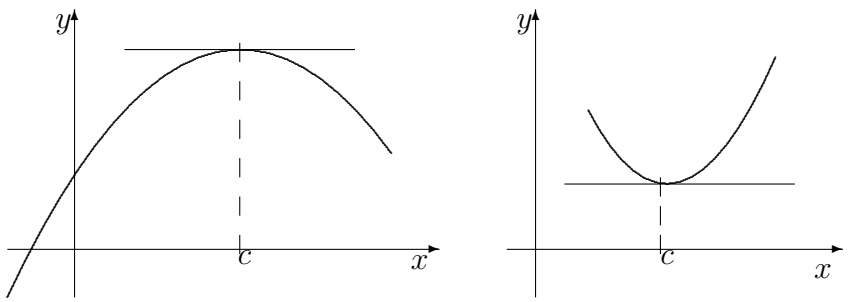


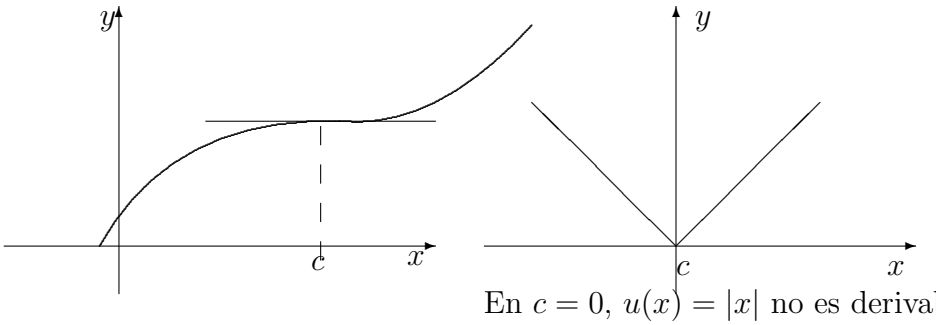
Observar que, en los intervalos (a, b) y (c, d) las rectas tangentes en cada punto tienen pendientes positivas por lo cual $f'(x) > 0$ en esos intervalos. En cambio, en el intervalo (b, c) las rectas tangentes en cada punto tienen pendientes negativas por lo cual $f'(x) < 0$ en ese intervalo.
En resumen:

Si $f'(x) > 0$ en un intervalo entonces f es **creciente** en ese intervalo
Si $f'(x) < 0$ en un intervalo entonces f es **decreciente** en ese intervalo

14.2. Punto crítico

Un **punto crítico** de f es un número c tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe (en algunos libros se lo llama número crítico lo que parece mas razonable por ser una abscisa, sin embargo utilizaremos la expresión punto crítico por ser la mas habitual).
Si f es una función derivable en c, la pendiente de la recta tangente es 0 y la recta tangente es horizontal.
En los gráficos siguientes se muestran algunas maneras en que esto puede pasar.





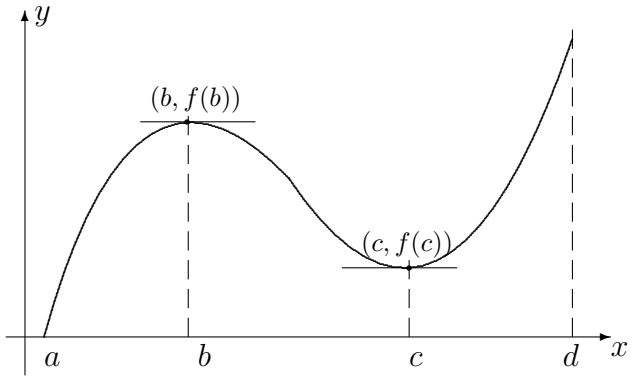
En $c = 0$, $u(x) = |x|$ no es derivable.

14.3. Máximo local y mínimo local

Una función f tiene un **máximo local o relativo** en c si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c.
Una función f tiene un **mínimo local o relativo** en c si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c.

En la figura siguiente se muestra la gráfica de una función que tiene un máximo local en b y un mínimo local en c. Se ve que en esos puntos la recta tangente es horizontal (tiene pendiente 0). Como la pendiente de la recta tangente es la derivada en el punto: $f'(b) = 0$ y $f'(c) = 0$. Luego

Si f tiene un máximo o mínimo local en c y si existe $f'(c)$ entonces $f'(c) = 0$, es decir, c es un punto crítico de f.



Ejemplos

1. Hallar los puntos críticos de $h(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 31$.

   Calculamos todos los valores c para los cuales $h'(x) = 0$, es decir las soluciones de la ecuación: $12x^2 - 10x + 1 = 0$. Los puntos críticos de la función h son dos: $c_1 = \dfrac{10 + \sqrt{52}}{24}$ y $c_2 = \dfrac{10 - \sqrt{52}}{24}$

2. Hallar todos los puntos críticos de $k(x) = \cos(2\pi x)$.

   Hallamos todos los valores c para los cuales $k'(x) = 0$, es decir las soluciones de la ecuación:

   $-2\pi \operatorname{sen}(2\pi x) = 0$

   entonces $2\pi x = n\pi$ donde n es un número entero cualquiera o sea que $x = \frac{n}{2}$.

   Si consideramos la misma función pero solamente en el intervalo $[-3, 2]$ los puntos críticos serán: $c_1 = -3$, $c_2 = -\frac{5}{2}$, $c_3 = -2$, $c_4 = -\frac{3}{2}$, $c_5 = -1$, $c_6 = -\frac{1}{2}$, $c_7 = 0$, $c_8 = \frac{1}{2}$, $c_9 = 1$, $c_{10} = \frac{3}{2}$, $c_{11} = 2$.

3. Dada $g(x) = -2x^2 + 4x - 3$ estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

   Como g es derivable para todos los números reales, se puede calcular $g'(x) = -4x + 4$.

   Sus puntos críticos son las soluciones de la ecuación: $-4x + 4 = 0$.

   El único punto crítico es $c = 1$.

   Como $g'(x)$ es continua en todo su dominio (los números reales) si toma el valor 0 solamente para $x = 1$ entonces los valores de $g'(x)$ serán todos positivos o negativos a la derecha o a la izquierda de 1:

   en los x de $(-\infty, 1)$ $g'(x) > 0$ y la función es creciente

   en los x de $(1, +\infty)$ $g'(x) < 0$ y la función es decreciente.

   En resumen, es creciente en $(-\infty, 1)$ tiene un punto crítico en $x = 1$

y es decreciente en $(1, +\infty)$. Por lo tanto en $x = 1$ la función tiene un máximo relativo y su valor es $g(1) = -1$.

4. Dada $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

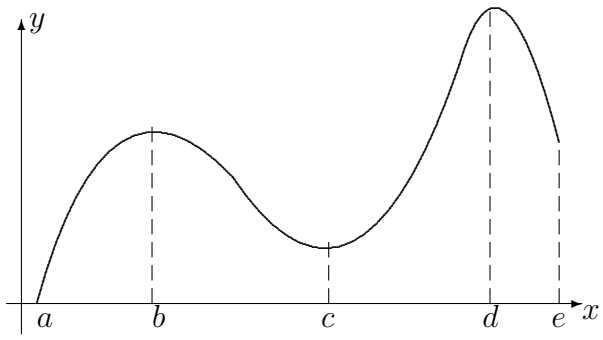
   $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$ se anula para $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -2$.

   Quedan determinados tres intervalos:
   para los x de $(-\infty, -2)$ $f'(x) > 0$ y f es creciente.
   para los x de $(-2, \frac{2}{3})$ $f'(x) < 0$ y f es decreciente.
   para los x de $(\frac{2}{3}, +\infty)$ $f'(x) > 0$ y f es creciente.
   Entonces la función tiene un máximo relativo en el punto $(-2, 5)$ y un mínimo relativo en $(\frac{2}{3}, -\frac{121}{27})$.

14.4. Máximo absoluto y Mínimo absoluto

Una función f tiene un punto **máximo absoluto** en c en un intervalo I si y solo si, $f(c) \geq f(x)$ para todos los números x en I . El valor $f(c)$ se llama valor máximo absoluto de f en el intervalo I.
Si la condición $f(c) \geq f(x)$ se cumple para todos los números x en todo el dominio de f, decimos entonces que la función tiene un máximo absoluto o global en c en el dominio.

Una función f tiene un punto **mínimo absoluto** en c en un intervalo I, si y solo si, $f(c) \leq f(x)$ para todos los números x en I. El valor $f(c)$ se llama valor mínimo absoluto de f en el intervalo I.
Si la condición $f(c) \leq f(x)$ se cumple para todos los números x en todo el dominio de f, decimos entonces que la función tiene un mínimo absoluto o global en c en el dominio.

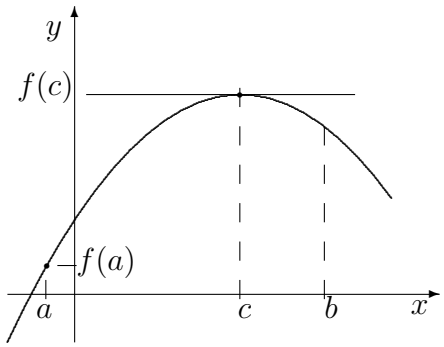


En la gráfica anterior:

- d es el punto máximo absoluto de f y el valor máximo absoluto es $f(d)$
- a es el punto mínimo absoluto de f y el valor mínimo absoluto es $f(a)$
- b es el punto máximo relativo de f y el valor máximo relativo es $f(b)$
- d es un punto máximo relativo de f y el valor máximo relativo es $f(d)$

14.4.1. Máximos y mínimos absolutos en un intervalo cerrado

Teorema: Sea f una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces existe un punto en el intervalo donde f tiene un máximo absoluto y existe un punto en el intervalo donde f tiene un mínimo absoluto.



Los máximos y mínimos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ se encuentran en los puntos críticos de la función dentro del intervalo o en los extremos del intervalo.
Como ejemplo, en la figura anterior el máximo absoluto se encuentra en el punto crítico c y el valor máximo absoluto es $f(c)$, el mínimo absoluto se encuentra en a, que es el extremo izquierdo del intervalo, y el valor mínimo absoluto es $f(a)$.

El procedimiento para encontrar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de una función continua $f(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ es:

1. Hallar, si existen, los puntos críticos que pertenecen al intervalo $[a, b]$
2. Calcular los valores de f en los puntos críticos hallados en el punto anterior.
3. Calcular los valores de f en los puntos extremos del intervalo, es decir $f(a)$ y $f(b)$.
4. El mayor de los valores calculados en 2. y 3. es el valor máximo absoluto y el menor valor es el mínimo absoluto.

Ejemplos

1. Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de la función

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3 \text{en el intervalo} [-3, 5]$$

$f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[-3, 5]$, por el teorema anterior en dicho intervalo alcanza un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto. Esos valores pueden estar en los extremos del intervalo o en los puntos críticos que están dentro del intervalo, por lo tanto basta con encontrarlos y calcular los valores de la función en

cada uno de esos puntos:

Los puntos críticos se hallan encontrando las soluciones de la ecuación: $3x^2 + 4x - 4 = 0$, que son $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -2$ y ambos se encuentran en $[-3, 5]$.

	x	$f(x)$
extremo del intervalo	-3	$f(-3) = 0$
extremo del intervalo	5	$f(5) = 152$
punto crítico	$\frac{2}{3}$	$f(\frac{2}{3}) = -\frac{121}{27}$
punto crítico	-2	$f(-2) = 5$

El máximo absoluto para la función en ese intervalo es $f(5) = 152$. El mínimo absoluto es $f(\frac{2}{3}) = -\frac{121}{27}$

2. Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de la misma función del ejemplo anterior $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ en el intervalo $[1, 5]$

   Los puntos críticos son: $x_1 = \frac{2}{3}$ y $x_2 = -2$ y no se encuentran en $[1, 5]$.

	x	$f(x)$
extremo del intervalo	1	$f(1) = -4$
extremo del intervalo	5	$f(5) = 152$

   El máximo absoluto para la función en ese intervalo es $f(5) = 152$. El mínimo absoluto es $f(1) = -4$

14.5. Ejercicios

1. $\otimes$ $\odot$ Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ b) $p(x) = x^3 - 3x$ c) $v(z) = 3z^2 - z + 1$

   d) $r(x) = \cos x$ e) $q(t) = t^3 + 2$ f) $g(t) = \operatorname{sen} t$

2. $\otimes$ $\odot$ Determinar los intervalos sobre los cuales la funciones siguientes son crecientes y decrecientes.

   a) $u(x) = x^3 + 1$ b) $g(t) = t^2 - t + 5$ c) $p(t) = t^3 + t - 2$
   d) $f(t) = -t^3 + 2t + 1$ e) $f(z) = 5z^2 + 1$

3. $\otimes$ $\odot$ Para cada una de las funciones siguientes, hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto en el intervalo dado

   a) $f(x) = x^2 - 2x - 8 \quad [0, 4]$ b) $g(x) = (x - 4)^5 \quad [3, 6]$
   c) $p(x) = x - x^2 \quad [-1, 2]$ d) $f(t) = 3t - t^3 \quad [-2, \sqrt{3}]$

4. $\otimes$ $\odot$ Se va a fabricar una caja sin tapa con una base cuadrada. La suma de las areas de las cinco caras es $3m^2$. Determinar las dimensiones de los lados de la caja si el volumen debe ser máximo.

5. $\otimes$ $\odot$ Un recipiente tiene forma de cilindro sin tapa superior y el area total es de $10m^2$. Hallar el radio de la base y la altura si su volumen debe ser máximo (el área de un círculo de radio R es πR^2, su longitud es $2\pi R$ y el volumen de un cilindro de altura y y cuya base tiene radio R es $\pi R^2 y$).

6. $\otimes$ $\odot$ Resolver los dos ejercicios anteriores cuando la caja y el recipiente cilíndrico están cerrados por arriba.

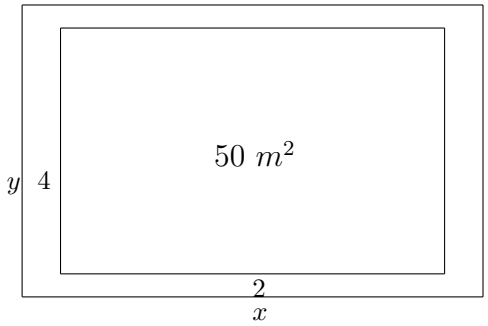
7. $\otimes$ $\odot$ Un veterinario necesita aislar cierta cantidad de vacas enfermas y dispone de 80 metros de alambre de púa para cercar un rectángulo con dos hilos utilizando como uno de sus lados un alambrado que ya existe. Calcular las dimensiones para que el área resulte máxima.

8. $\otimes$ $\odot$ Hallar el punto de la recta $y = 2x + 1$ que se encuentra mas cerca del origen.(Escribir la distancia entre el origen y un punto cual-

quiera de la recta en función de x solamente y minimizar). Representar gráficamente la recta.

9. $\otimes$ $\odot$ Un regador impulsa agua hacia arriba con un ángulo de inclinación x. Sea $A(x)$ el alcance del agua, esto es, la distancia desde el regador hasta el punto de impacto del agua. $A(x) = \dfrac{2v^2}{g} \operatorname{sen} x \cos x$ donde $v = \sqrt{9{,}8}\ m/seg$ es la velocidad inicial y $g = 9{,}8 m/seg^2$ es la aceleración que produce la gravedad. Determinar para que ángulo es máximo el alcance. (Si es necesario, recordar que $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$).

10. $\otimes$ $\odot$ Se desea construir un galpón rectangular con un corral de 50 metros cuadrados que tiene una circulación perimetral de 4 metros de ancho en dos lados opuestos y de 2 metros de ancho en los otros dos lados. Calcular las dimensiones del galpón para que su área sea mínima.



Aclaración: *La mayoría de los ejercicios pueden verificarse utilizando software del siguiente modo:*
Los señalados con $\otimes$ *pueden resolverse utilizando un software de matemática dinámica.*
Los señalados con $\odot$ *pueden resolverse utilizando software de algebra computacional.*
En el Anexo que aparece al final del libro se dan pautas sobre los programas recomendados para cada caso.

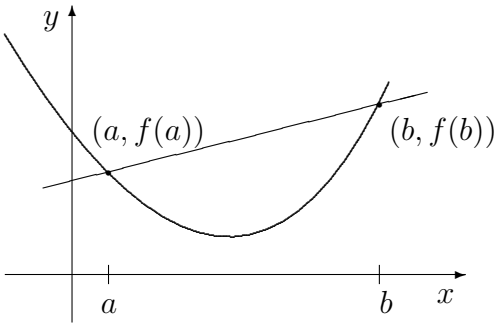
Capítulo 15

Trazado de curvas

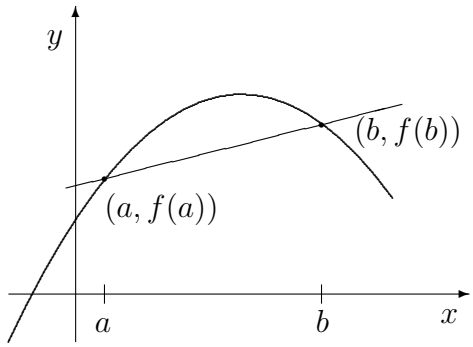
15.1. Concavidad

Sea f una función continua definida en el intervalo $[a, b]$. Supongamos que existen f' y f'' en el intervalo (a, b). Consideramos la derivada segunda como la razón de cambio de $f'(x)$ en el intervalo.

Si la segunda derivada es positiva en el intervalo (a, b) entonces $f'(x)$ es creciente y la curva es **cóncava hacia arriba**. En este caso, el segmento que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica de f.

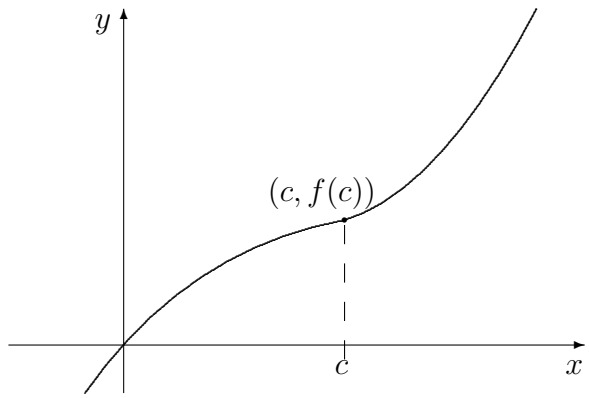


Si la segunda derivada es negativa en el intervalo (a, b) entonces $f'(x)$ es decreciente y la curva es **cóncava hacia abajo**. En este caso, el segmento que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por debajo de la gráfica de f.



15.2. Punto de inflexión

Un punto donde una curva cambia su comportamiento de cóncava hacia abajo para hacerse cóncava hacia arriba (o viceversa) se llama **punto de inflexión**.



En el intervalo $(-\infty, c)$ la función es cóncava hacia abajo (la derivada segunda es negativa).
En el intervalo $(c, +\infty)$ la función es cóncava hacia arriba (la derivada segunda es positiva).
Luego en $(c, f(c))$ la gráfica tiene un punto de inflexión.

15.2.1. Puntos de inflexión e intervalos de concavidad

Si en $(c, f(c))$ hay un punto de inflexión y existe la derivada segunda en ese punto entonces $f''(c) = 0$.

Los valores en los que la derivada segunda se anula **no necesariamente determinan puntos de inflexión**.

Para determinar los puntos de inflexión se buscan los valores de x tales que $f''(x) = 0$ y luego se estudia la concavidad en cada intervalo que queda determinado por estos valores.

Ejemplos:

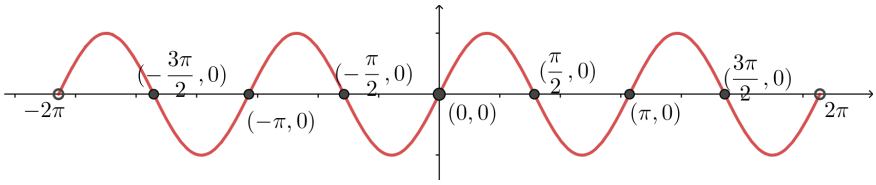
1. Hallar los intervalos de concavidad y puntos de inflexión de
   $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ en el intervalo $(-2\pi, 2\pi)$
   Calculamos la derivada segunda de $f(x)$:
   $f'(x) = 2\cos(2x), \qquad f''(x) = -4\operatorname{sen}(2x)$
   Luego encontramos los puntos para los cuales $f''(x) = 0$, es decir, resolvemos la ecuación: $-4\operatorname{sen}(2x) = 0$
   $\operatorname{sen}(2x) = 0$ cuando $2x = n\pi$, n es un número entero entonces $x = \dfrac{n\pi}{2}$.
   Los intervalos en los que la derivada segunda mantiene su signo son:

Intervalo	signo de $f''(x)$	concavidad
$(-2\pi, -\frac{3\pi}{2})$	$-$	abajo
$(-\frac{3\pi}{2}, -\pi)$	$+$	arriba
$(-\pi, -\frac{\pi}{2})$	$-$	abajo
$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	$+$	arriba
$(0, \frac{\pi}{2})$	$-$	abajo
$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$+$	arriba
$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$-$	abajo
$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$	$+$	arriba

Entonces:

$-\frac{3\pi}{2}$; $-\pi$; $-\frac{\pi}{2}$; 0 ; $\frac{\pi}{2}$; π ; $\frac{3\pi}{2}$ son las abscisas de los puntos de inflexión.

Los **puntos de inflexión estan marcados en la gráfica**.



2. Hallar los intervalos de concavidad y puntos de inflexión (si existen) de $g(x) = x^4 - 4x$

   Para encontrar los intervalos de concavidad primero hallamos la derivada segunda de $g(x)$:

   $g'(x) = 4x^3 - 4, \qquad g''(x) = 12x^2$

   Luego encontramos los puntos para los cuales $g''(x) = 0$, es decir, resolvemos la ecuación: $12x^2 = 0$

   La solución es $x = 0$ y los intervalos de concavidad serán:

Intervalo	signo de $g''(x)$	concavidad
$(-\infty, 0)$	$+$	arriba
$(0, +\infty)$	$+$	arriba

   La función **no tiene puntos de inflexión** pues no hay cambios en la concavidad.

15.3. Criterio de la derivada segunda

Sea f una función que tiene las dos primeras derivadas continuas en un intervalo abierto, si existe un punto c donde

$$f'(c) = 0 \qquad \text{y} \qquad f''(c) > 0$$

entonces c es un **punto mínimo local** de f.

$$\text{Si} \qquad f'(c) = 0 \qquad \text{y} \qquad f''(c) < 0$$

entonces c es un **punto máximo local** de f.

15.4. Análisis de la gráfica de una función

En esta sección se integran todos temas que estudiamos: función, límite, derivación, etc. Con todos los elementos nombrados vamos a tener un conocimiento completo del comportamiento de una función a través de su gráfica. Para lograrlo, damos a continuación una serie de pasos para organizar el trabajo y sin que esto signifique un orden que deba seguirse estrictamente.

1. Dominio, paridad (analizar si la función es par, impar o ninguna de ambas) e intersecciones con los ejes coordenados.

2. Puntos críticos.

3. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

4. Máximos locales y mínimos locales.

5. Comportamiento de la función cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$.

6. Comportamiento de la función cuando x tiende a los puntos de discontinuidad.

7. Intervalos de concavidad.

8. Puntos de inflexión.

9. Utilizar los datos obtenidos para graficar la curva.

15.4.1. Ejemplo 1

Análisis de la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x$

1. El dominio de $f(x)$ es el conjunto de todos los números reales. $f(x)$ es una función impar puesto que
   $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$.

2. $f'(x) = 3x^2 - 1$ entonces los puntos críticos son

$$x_1 = \sqrt{1/3}, \qquad\qquad x_2 = -\sqrt{1/3}$$

3. Puesto que f' es continua y se anula solo en x_1 y x_2 f' conserva el mismo signo en cada uno de los intervalos:
   $(-\infty, -\sqrt{1/3})$, $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$ y $(\sqrt{1/3}, \infty)$.
   Luego:
   En $(-\infty, -\sqrt{1/3})$ $f'(x) > 0$ y f es creciente.
   En $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$ $f'(x) < 0$ y f es decreciente.
   En $(\sqrt{1/3}, +\infty)$ $f'(x) > 0$ y f es creciente.

4. Por lo calculado en 3. se puede afirmar que $-\sqrt{1/3}$ es un punto máximo local y $\sqrt{1/3}$ es un punto mínimo local.
   Esto también puede verificarse usando el criterio de la derivada segunda:
   como $f''(x) = 6x$ entonces
   $f''(-\sqrt{1/3}) = -6\sqrt{1/3} < 0$ y $f''(\sqrt{1/3}) = 6\sqrt{1/3} > 0$ entonces:
   $(-\sqrt{1/3}, \frac{4}{3}\sqrt{1/3})$ es un punto **máximo local** y $(\sqrt{1/3}, -\frac{4}{3}\sqrt{1/3})$ es un punto **mínimo local**.

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 - x = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3(1 - \dfrac{1}{x^2}) = -\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3(1 - \dfrac{1}{x^2}) = +\infty$

6. Esta función no tiene puntos de discontinuidad.

7. Tenemos que $f''(x) = 6x$ entonces la derivada segunda se anula para $x_0 = 0$.

   Puesto que f'' es continua y se anula solo en x_0, f'' conserva el mismo signo en cada uno de los intervalos: $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

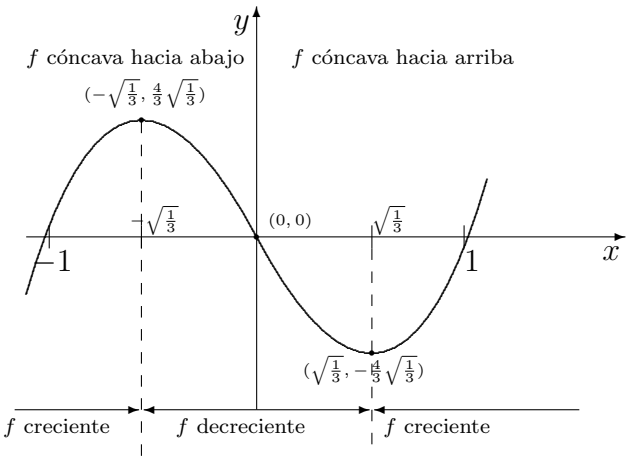
   Luego:

   en $(-\infty, 0)$ $\quad f''(x) < 0$ y f es cóncava hacia abajo.

   En $(0, +\infty)$ $\quad f''(x) > 0$ y f es cóncava hacia arriba.

8. Por lo calculado en 7. se puede afirmar que $(0, 0)$ es un punto de inflexión.

9. La gráfica de la curva usando los datos obtenidos en los items anteriores:



15.4.2. Ejemplo 2

Análisis de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

1. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales menos el 1.

2. Como $f'(x) = \dfrac{(x-1)(2x-2) - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$
   entonces los puntos críticos son $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$.

3. Puesto que f no está definida en todo el intervalo $(0,2)$, el signo de f' se debe determinar por separado en los intervalos $(0,1)$ y $(1,2)$ así como en los intervalos: $(-\infty,0)$ y $(0,+\infty)$. Luego:
   En $(-\infty,0)$ $\quad f'(x)>0$ y f es creciente.
   En $(0,1)$ $\quad f'(x)<0$ y f es decreciente.
   En $(1,2)$ $\quad f'(x)<0$ y f es decreciente.
   En $(2,+\infty)$ $\quad f'(x)>0$ y f es creciente.

4. Por lo calculado en el item anterior 0 es un punto máximo local y 2 es un punto mínimo local.
   Esto también puede verificarse usando el criterio de la derivada segunda:
   $f''(x)=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4}=$
   $=\dfrac{(x-1)(2(x-1)^2-2x(x-2))}{(x-1)^4}$
   $f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}$; $\quad f''(0)=-2$ y $f''(2)=2$ entonces en 0 hay un punto máximo local y en 2 hay un punto mínimo local.

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})}=-\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})}=+\infty$

6. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=+\infty$
   $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=-\infty$

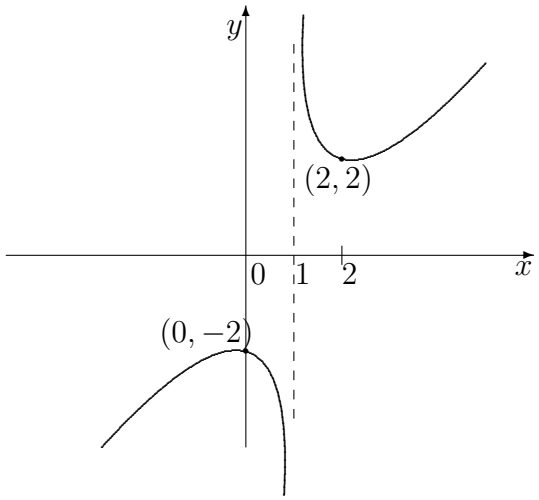
7. $f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}$, no se anula para ningún x (no hay puntos de inflexión).

Puesto que f no está definida en todos los números reales, el signo de f'' se debe determinar por separado en los intervalos: $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$. Luego:

en $(-\infty, 1)$ $\quad f''(x) < 0$ y f es cóncava hacia abajo.

En $(1, \infty)$ $\quad f''(x) > 0$ y f es cóncava hacia arriba.

8. La gráfica de la curva, usando los datos obtenidos:



15.5. Funciones exponencial y logaritmo

15.5.1. Función exponencial

La función $f(x) = e^x$ (e es un número irracional $e \approx 2{,}718281828$) se llama **función exponencial** y está definida para todos los números reales. La imagen es el conjunto de los números reales positivos y tiene las propiedades siguientes:

Para todos los números reales x y y se cumple:

1. $e^{x+y} = e^x e^y$

2. $(e^x)^y = e^{xy}$

3. $e^0 = 1$

4. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

5. La función $f(x) = e^x$ es derivable y $f'(x) = e^x$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Ejemplos:

1. Si $u(x) = e^{x^2-3x+3}$, su derivada, aplicando las reglas de derivación es

$$u'(x) = e^{x^2-3x+3} \cdot (2x-3).$$

2. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$h(x) = e^{x^2-3x+3} + \cos(2\pi x) \text{ en } x_0 = 1.$$

Puesto que $h'(x) = e^{x^2-3x+3} \cdot (2x-3) - \operatorname{sen}(2\pi x) \cdot 2\pi$ la pendiente de la recta es $h'(1) = -e$ y el punto de tangencia es $P(1, e+1)$ luego la ecuación de la recta es $\quad y - (e+1) = -e(x-1)$

15.5.2. Función logaritmo

La **función logaritmo**, $g(x) = \ln x$ tiene por dominio el conjunto de todos los números reales positivos.

Observación: Se cumplen las siguientes condiciones:

- $e^x = y \quad$ es equivalente a $\quad x = \ln y$
- $e^{\ln x} = x \qquad x > 0$
- $\ln e^x = x$

La función logaritmo tiene las siguientes propiedades, si x e y son mayores que cero se cumple que:

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

2. Si n es entero, entonces: $\ln(x^m) = m \ \ln x$

3. Si n es entero positivo, entonces: $\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \ln x$

4. Si $g(x) = \ln x$ entonces $g'(x) = \dfrac{1}{x}$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

15.5.3. Gráficas

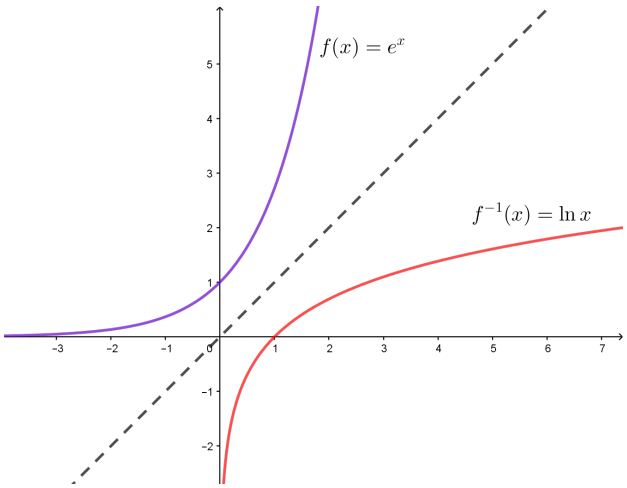


Figura 15.1: Funciones exponencial y logaritmo

Ejemplos:

1. Hallar el dominio de la función $f(x) = \ln(3x + 4)$

   Puesto que el dominio de la función logaritmo es el conjunto de todos los números reales positivos, el dominio de $f(x)$ será el conjunto de los x tales que cumplan que $3x + 4 > 0$ o sea el intervalo $(-\frac{4}{3}, +\infty)$

2. Si $v(x) = \ln(x^6 + e^{2x})$ aplicando la regla de la cadena y las reglas de derivación: $v'(x) = \dfrac{1}{x^6 + e^{2x}} \cdot \left[6x^5 + e^{2x} \cdot 2\right]$.

3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \ln(2 + x^6 + e^{2x})$ en $x_0 = 0$

   Si $v(x) = \ln(2+x^6+e^{2x})$ entonces $v'(x) = \dfrac{1}{2 + x^6 + e^{2x}} \cdot \left[6x^5 + e^{2x} \cdot 2\right]$

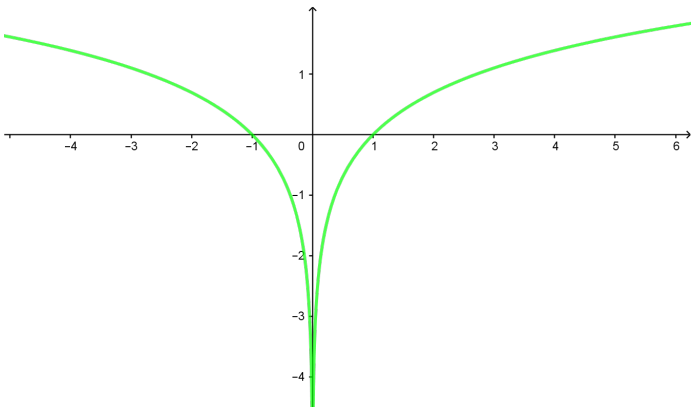
   Puesto que la pendiente de la recta es $v'(0) = \dfrac{2}{3}$ y el punto es $P(0,\ln 3)$

   la ecuación de la recta es $\quad y - \ln 3 = \dfrac{2}{3}(x - 0)$

4. A continuación aparece la gráfica de $f(x) = \ln(|x|) = \begin{cases} \ln(x) \text{ si } x > 0 \\ \ln(-x) \text{ si } x < 0 \end{cases}$

   cuyo dominio son todos los reales menos el cero.

   Podemos ver que:



$$\lim_{x\to 0^+} \ln|x| = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} \ln|x| = \lim_{x\to 0^-} \ln(-x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} \ln|x| = \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} \ln|x| = \lim_{x\to -\infty} \ln(-x) = +\infty$$

15.6. Función exponencial general

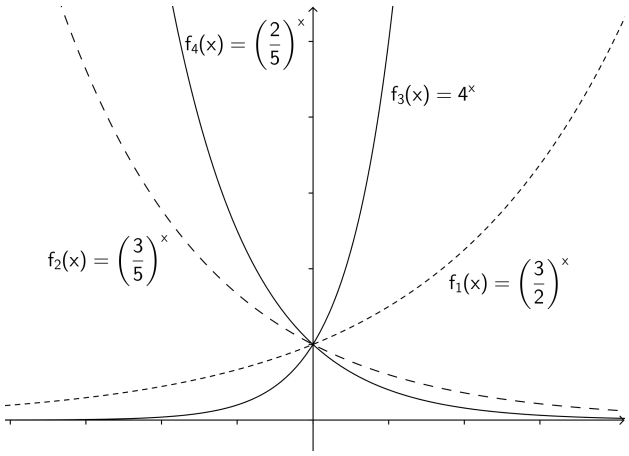
Sea a un número positivo. Puesto que $a = e^{\ln a}$

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$$

Considerando a la función exponencial definida para todos los números reales. Si $g(x) = a^x$ entonces g es derivable y:

$$g'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

Gráficas de algunas funciones del tipo $f(x) = a^x$



Ejemplos:

1. Hallar la derivada de $h(x) = 3^x$
   $h(x) = 3^x = e^{x \ln 3}$, $h'(x) = e^{x \ln 3} \cdot \ln 3$

2. Hallar la derivada de $w(x) = x^{x^2}$
   $w(x) = x^{x^2} = e^{x^2 \ln x}$, $w'(x) = e^{x^2 \ln x} \cdot (2x \ln x + x^2 \dfrac{1}{x})$

15.7. Ejercicios

1. ⊗ ⊙ Determinar todos los puntos de inflexión de $g(x) = \cos x$ en el intervalo $(0, 4\pi)$.

2. ⊗ ⊙ Determinar todos los puntos críticos y de inflexión de $F(x) = \operatorname{sen}^2 x$ en el intervalo $(0, 2\pi)$ (Recordar que $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$). Usar esta información para trazar la gráfica.

3. $\otimes$ $\odot$ Determinar todos los puntos críticos y de inflexión de $h(x) = x + \dfrac{1}{x}$

4. Mostrar que la gráfica de la función $H(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$ tiene exactamente un punto de inflexión.

5. $\otimes$ $\odot$ Hallar la ecuación de la recta tangente a las gráficas de las funciones

   $g_1(x) = \ln(x^2 + 1)$ en $x = 2$ $\qquad$ $g_2(x) = \ln x$ en $\frac{1}{2}$.

   $g_3(x) = e^{2x}$ en $x = 1$ $\qquad$ $g_4(x) = xe^x$ en $x = 2$

   $g_5(x) = x^x$ en $x = 2$ $\qquad$ $g_6(x) = x^{\sqrt{x}}$ en $x = 4$.

6. $\otimes$ $\odot$ Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$ $\qquad$ b) $g(x) = \operatorname{sen}(\ln(2x + 3))$

   c) $u(t) = \ln(t^2 + 5)$ $\qquad$ d) $F(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

   e) $f(x) = 10^x$ $\qquad$ f) $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

7. $\otimes$ $\odot$ Trazar las gráficas de las funciones siguientes teniendo en cuenta lo presentado en la sección 15.4

   a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$ $\qquad$ b) $g(x) = x^4 - 2x^2$

   c) $v(x) = -2x^3 + x^2 + 3x$ $\qquad$ d) $F(x) = x^6 - 3x^2 + 2$

   e) $G(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^3$ $\qquad$ f) $q(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

   g) $w(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 3}$ $\qquad$ h) $W(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

   i) $p(x) = \dfrac{2x - 3}{3x + 1}$ $\qquad$ j) $u(x) = \dfrac{x}{3x - 5}$

   k) $h_1(x) = \ln(x^2 + 1)$ $\qquad$ $h_2(x) = e^{-x^2}$

8. $\otimes$ $\odot$ Un rectángulo debe tener área de 6 m^2. Hallar sus dimensiones de modo que la distancia de una esquina al punto medio de un lado no adyacente sea un mínimo.

9. $\otimes$ $\odot$ Una empresa vende un fertilizante a \$ 50 por bolsa. El costo total de colocar en el mercado x bolsas está dado por la función: $f(x) = 5000 + 650x - 45x^2 + \frac{4}{9}x^3$. ¿Cuántas bolsas deberán producirse al día para maximizar las ganancias? ¿Cuál es la ganancia diaria para este número de bolsas?

10. $\otimes$ $\odot$ Una ventana rectangular está cerrada en su parte superior con un semicírculo. Hallar la medida del alféizar y la altura de las jambas para que el perímetro de la ventana sea de 4 metros y el área lo mas grande posible.

11. $\otimes$ $\odot$ En el análisis de experimentos con fertilizantes, se suelen interpretar esos ensayos por la ley de Mitscherlich:

$$y = A(1 - 10^{-c(x+b)})$$

donde y es la producción, x es la dosis de nutriente, A es la producción máxima teórica posible cuando se aumenta indefinidamente la dosis de un nutriente (el fósforo, por ejemplo), c es el llamado coeficiente de eficacia (es un parámetro típico del nutriente en cuestión) y b es el tenor de ese nutriente contenido en suelo en forma asimilable por las plantas. Graficar la producción en función de la dosis de nutriente en los siguientes casos:

   a) La experiencia tras muchos ensayos de campo indica las siguientes estimaciones para fósforo:
   $c = 0,0088\ ha/kg$, $A = 68\ ton/ha$, $b = 65\ kg/ha$

   b) La experiencia tras muchos ensayos de campo indica las siguientes estimaciones para potasio:
   $c = 0,0088\ ha/kg$, $A = 85\ ton/ha$, $b = 83\ kg/ha$

12. $\bigotimes$ $\bigodot$ El número de bacterias en un cultivo bacteriano, es la siguiente función del tiempo (suponiendo que la rapidez de multiplicación es proporcional al número de bacterias presentes): $N(t) = N_0 e^{kt}$ donde N_0 es el número inicial de bacterias y k es la constante de proporcionalidad.

    a) Hallar N_0 y k si para $t = 1$ hora el número de bacterias medido es $\frac{3}{2}N_0$ y para $t = 2$ horas, el número de bacterias es 225.
    b) Graficar $N(t)$.

Aclaración: *La mayoría de los ejercicios pueden verificarse utilizando software del siguiente modo:*
Los señalados con $\bigotimes$ *pueden resolverse utilizando un software de matemática dinámica.*
Los señalados con $\bigodot$ *pueden resolverse utilizando software de algebra computacional.*
En el Anexo que aparece al final del libro se dan pautas sobre los programas recomendados para cada caso.

Capítulo 16

Introducción a la integración

16.1. La Integral Indefinida

16.1.1. Definición

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo. Una **integral indefinida o primitiva** para f es una función F tal que:

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ en el intervalo.}$$

Observación: La derivada de una constante es cero, luego cualquier otra función $G(x) = F(x) + C$, donde C es una constante, tambien es una integral indefinida para f.

Está claro que nos encontramos con la operacion inversa a la derivación que nombraremos como integración de una función dada y la notación es:

$$\int f(x)\ dx$$

que representa el conjunto de todas las primitivas de $f(x)$ y se lee "la integral de $f(x)$".

Observación: $\displaystyle\int f'(x)\ dx = f(x) + C$

A partir de los resultados conocidos sobre las derivadas de algunas funciones podemos construir una tabla de integrales indefinidas:

$$\int 1\ dx = x + C \qquad \int \frac{1}{x}\ dx = \ln x + C \text{ (solo si } x > 0)$$

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ \text{ si } n \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\ dx = \ln(-x) + C \text{ (solo si } x < 0)$$

$$\int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x + C \qquad \int \operatorname{sen} x\ dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int e^x\ dx = \ e^x\ + C$$

16.1.2. Propiedades de la integral indefinida

1. $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$
2. $\displaystyle\int kf(x)\ dx = k \int f(x)\ dx$, k es una constante

Observación: Notar que **no se han dado** propiedades para resolver la integral de un producto o un cociente, no por omisión sino porque **no las hay.** Para calcular primitivas de otras funciones se usan algunos métodos de integración que nos permitirán encontrar las integrales de una clase muy amplia de funciones. Todos los métodos tienen como objetivo reducir la integral buscada a una integral ya conocida o inmediata, como por ejemplo una de las de la tabla ó bien reducirla a una integral más sencilla.

16.2. Método de integración por partes

A partir de la derivada de un producto:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

y la definición de primitiva se tiene que:

$$\int (f(x)g(x))' \, dx = f(x)g(x)$$

y podemos obtener la siguiente fórmula:

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) \, dx$$

Ejemplo: Calcular $\displaystyle\int x \, e^x \, dx$
Si $f(x) = x$ entonces $f'(x) = 1$
Si $g'(x) = e^x$ entonces $g(x) = \int e^x \, dx$ o sea $g(x) = e^x$
Utilizando la formula: $\displaystyle\int x \, e^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C$
Observación: La fórmula de integración por partes a veces se presenta como:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \qquad \text{con } u = f(x) \;\; v = g(x)$$

donde $u = f(x)$ y $v = g(x)$.

16.3. Integral definida

La integral definida de una función continua $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se escribe:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Esta operación da como resultado un número que se calcula del siguiente modo (Regla de Barrow):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una primitiva de f
Notación: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

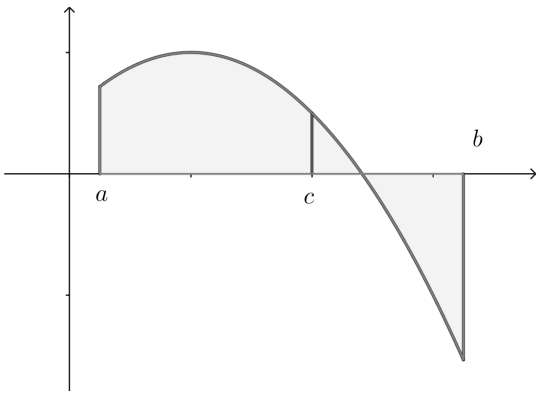
Observaciones:

Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, el número $\displaystyle\int_a^b f(x) \geq 0$ resulta el área bajo la curva entre a y b (área de la región encerrada por la gráfica de $f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x).

En (16.5) (optativo) se explica como se define una integral definida.

Propiedad: Si c es un punto del intervalo $[a, b]$ entonces

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$



Ejemplos:

1. Calcular: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx$. En este caso $f(x) = \cos x$, y $F(x) = \operatorname{sen} x$. Según la regla de Barrow:

   $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos \, x \, dx = F(2\pi) - F(-\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(2\pi) - \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}) = 0 - (-1) = 1$$

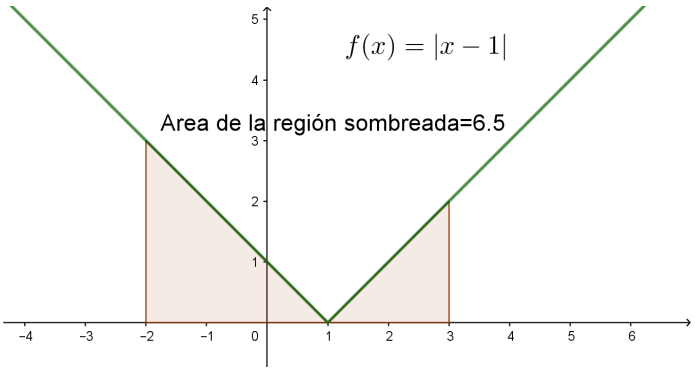
2. Calcular: $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x - 1| dx$.

   Puesto que $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Por la propiedad 16.3:
$\displaystyle\int_{-2}^{3} |x-1|dx = \int_{-2}^{1} |x-1|dx + \int_{1}^{3} |x-1|dx =$
$\displaystyle= \int_{-2}^{1} (-x+1)\ dx + \int_{1}^{3} (x-1)\ dx.$
Como $\displaystyle\int_{-2}^{1} (-x+1)\ dx = -\frac{x^2}{2} + x \Big|_{-2}^{1} = -1/2 + 1 - (-2-2) = 9/2$
$\displaystyle\int_{1}^{3} (x-1)\ dx = \frac{x^2}{2} - x \Big|_{1}^{3} = 9/2 - 3 - (1/2 - 1) = 2$
Por lo tanto: $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x-1|dx = 9/2 + 2 = 13/2$
Observación: Como en este caso $f(x) = |x-1|$ es una función que toma valores positivos para todo x,

$$\int_{-2}^{3} |x-1|dx = \frac{13}{2} = 6,5$$

resulta el área bajo la curva (la gráfica de la función $f(x)$ entre $x = -2$ y $x = 3$) y el eje x. En la figura que sigue aparece sombreada la región cuya área calculamos.



16.4. Ejercicios

1. $\odot$ $\otimes$ Calcular las siguientes integrales indefinidas:
   a) $\displaystyle\int x^2\ dx$ b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\ dt$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{z^4}\ dz$

2. $\odot$ $\otimes$ Calcular las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\int (x^2 + 3x)\ dx$ b) $\int (2\sqrt{x} + \frac{3}{x})\ dx$ c) $\int (\sqrt[3]{t} - 5\cos\ t)\ dt$

   d) $\int \frac{\sqrt{x} + 2x^5}{x^4}\ dx$ e) $\int (2\alpha + 3)^2\ d\alpha$ f) $\int (\frac{3}{t} - \frac{t^2+1}{2t})\ dt$

3. Calcular las siguientes integrales indefinidas usando integración por partes:

   a) $\int \ln x\ dx$ b) $\int x\cos\ x\ dx$ c) $\int \ln^2 x\ dx$

   d) $\int (3x-2)e^x\ dx$ e) $\int x^2 e^x\ dx$ f) $\int \pi x \operatorname{sen}\ x\ dx$

   g) $\int e^x \cos\ x\ dx$ h) $\int x^2 \ln\ x\ dx$ i) $\int x^8 \ln(5x) dx$

4. Sabiendo que $g'(x) = x^2 + 2x$ y que $g(1) = 2$, calcular $g(x)$.

5. Si la aceleración de un cuerpo que cae es constante y vale g$=-9,8 m/s^2$, calcular su función velocidad ($v(t)$) si la velocidad inicial ($v(0)$) era de 20 m/s.

6. Encontrar la función posición ($x(t)$) del cuerpo del problema anterior si su posición inicial ($x(0)$) era 5 m.

7. Si $g'(x) = \cos(x) + \operatorname{sen}(x)$ y $g(\frac{\pi}{2}) = 1$, calcular $g(x)$.

8. $\otimes$ $\odot$ Calcular las integrales siguientes:

   a) $\int_1^2 x^5 dx$ b) $\int_{-1}^2 x^{1/3} dx$ c) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x dx$

   d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx$ e) $\int_0^2 x e^x dx$

9. $\otimes$ $\odot$ Calcular las integrales siguientes (en todos los casos graficar las funciones):

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x| dx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} |\operatorname{sen} x| dx$ c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|) dx$

d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \ln\, x dx$

10. $\otimes$ $\odot$ Hallar el área de la región encerrada entre las gráficas de las funciones: $f(x) = x + 2, \quad g(x) = x^2$. Graficar.

11. $\otimes$ $\odot$ Hallar el área de las regiones encerradas entre las gráficas de las funciones: $f(x) = x, \quad g(x) = x^3,$ si $x < 0$. Graficar.

12. $\otimes$ $\odot$ Hallar el área de la región encerrada entre las gráficas de las funciones: $f(x) = -x^2 + 5, \quad g(x) = (x + 1)^2$. Graficar.

13. $\otimes$ $\odot$ Hallar el área de la región encerrada entre las gráficas de las funciones: $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos x,$ el eje y y el primer punto donde se intersecan esas curvas para $x > 0$. Graficar.

14. $\otimes$ $\odot$ Hallar el área comprendida entre las gráficas de las funciones: $f(x) = 2x, \quad g(x) = -2x + 4$ y el eje x. Graficar.

15. $\otimes$ $\odot$ Hallar el área comprendida entre las gráficas de las funciones: $f(x) = 1 - x, \quad g(x) = x - 1, \quad h(x) = 1$. Graficar.

16. $\otimes$ $\odot$ Calcular el área comprendida entre las gráficas de las funciones: $f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = 4 - x$. Graficar.

17. $\otimes$ $\odot$ Hallar el área de las regiones encerradas entre las gráficas de las funciones: $f(x) = \ln x, \quad g(x) = 0{,}5, \quad x = 3$ y el eje x. Graficar.

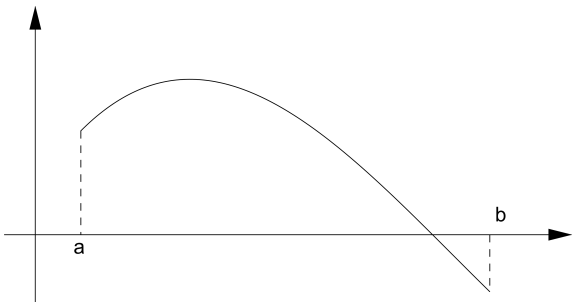
18. $\otimes$ $\odot$ Hallar el área de la región encerrada entre las gráficas de las funciones: $f(x) = |x - 1|, \quad g(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. Graficar.

19. $\otimes$ $\odot$ Hallar el área de la región encerrada entre las gráficas de las funciones: $f(x) = |x-2|$, $\quad g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, las rectas $x = 3$ y el eje y. Graficar.

Aclaración: *La mayoría de los ejercicios pueden verificarse utilizando software del siguiente modo:*
Los señalados con $\otimes$ *pueden resolverse utilizando un software de matemática dinámica.*
Los señalados con $\odot$ *pueden resolverse utilizando software de algebra computacional.*
En el Anexo que aparece al final del libro se dan pautas sobre los programas recomendados para cada caso.

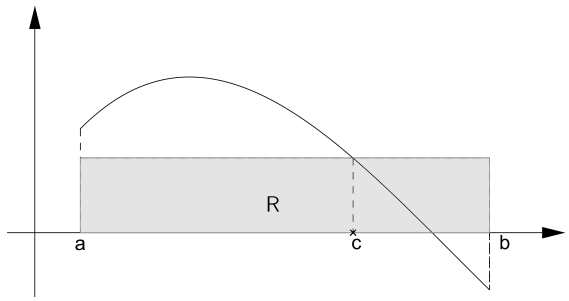
16.5. Introducción a la integral definida

Sea $f(x)$ una función continua definida en el intervalo $[a, b]$ cuya gráfica es la siguiente:

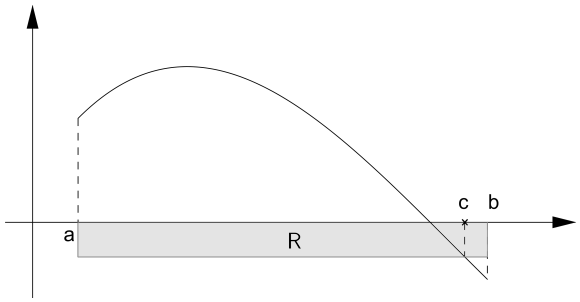


Dado un número arbitrario c en $[a, b]$, $f(c)$ es positivo, negativo o nulo:

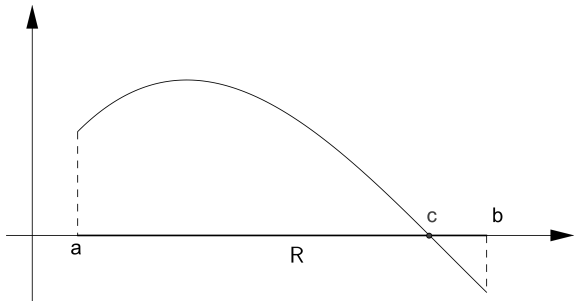
1. Si $f(c) > 0$ entonces $f(c)(b-a)$ es el área de R, donde R es el rectángulo de base $b - a$ y altura $f(c)$



2. Si $f(c) < 0$ entonces $f(c)(b-a)$ es un número negativo cuyo valor absoluto es el área de R, donde R es el rectángulo de base $b-a$ y altura $|f(c)| = -f(c)$



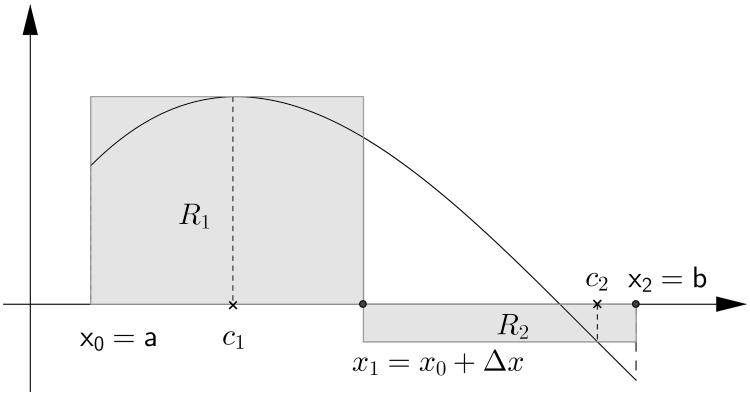
3. Si $f(c) = 0$, se puede pensar que $f(c)(b-a) = 0$ es el área del rectángulo en sentido amplio, de base $b-a$ y altura 0 (coincide con un segmento de recta).



Dividiendo el intervalo $[a, b]$ en dos subintervalos con la misma longitud, llamando $\Delta x = \frac{b-a}{2}$ a la longitud de los subintervalos y repitiendo el proceso anterior en cada subintervalo tenemos:

- $x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = b.$
- c_1 es un punto arbitrario en el intervalo $[x_0, x_1]$ y c_2 es un punto arbitrario en el intervalo $[x_1, x_2]$
- las cantidades $f(c_1)\Delta x$ y $f(c_2)\Delta x$ representan, según si $f(c_1)$ y $f(c_2)$ son mayores, menores o iguales a 0, el área o un número negativo cuyo valor absoluto es el área de cada rectángulo de base Δx y altura $f(c_1)$ y $f(c_2)$ o cero respectivamente.

Un caso particular se ve en la siguiente figura:



$f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x$ es un número positivo, negativo o es cero. Es la diferencia entre el área del rectángulo R_1 que está ubicado sobre el eje x y el área del rectángulo R_2 que está ubicado bajo el eje x.

El proceso de subdividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos iguales y repetir el procedimiento en cada uno puede continuar por ejemplo:
Dividiendo el intervalo $[a, b]$ en seis subintervalos iguales y llamando $\Delta x = \frac{b-a}{6}$ a la longitud de los subintervalos

- $x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x, \quad x_3 = x_2 + \Delta x, \quad x_4 = x_3 + \Delta x,$ $x_5 = x_4 + \Delta x, \quad x_6 = b$

- $c_1, c_2, ..., c_6$ los puntos arbitrarios en cada intervalo $[x_0, x_1], \ [x_1, x_2]$,..., $[x_5, x_6]$ respectivamente.

- las cantidades

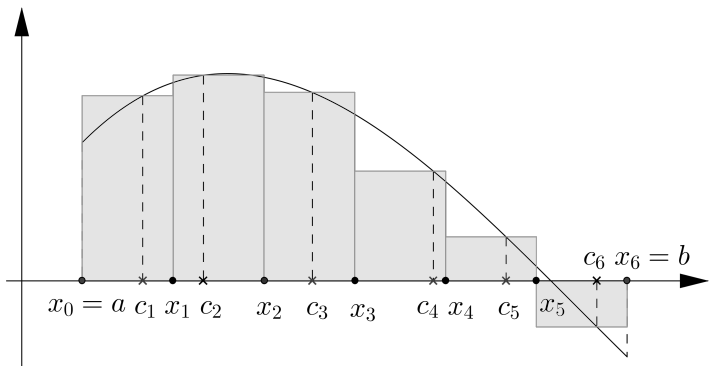
$$f(c_1)\Delta x, f(c_2)\Delta x, ..., f(c_6)\Delta x$$

representan, según si

$$f(c_1), f(c_2), ..., f(c_6)$$

son mayores, menores o iguales a 0, el área, un número negativo cuyo valor absoluto es el área de cada rectángulo de base Δx y altura $f(c_1), f(c_2), ..., f(c_6)$ o cero respectivamente.

Un caso particular se ve en la siguiente figura:



16.5.1. Suma de Riemann

Dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales y llamando

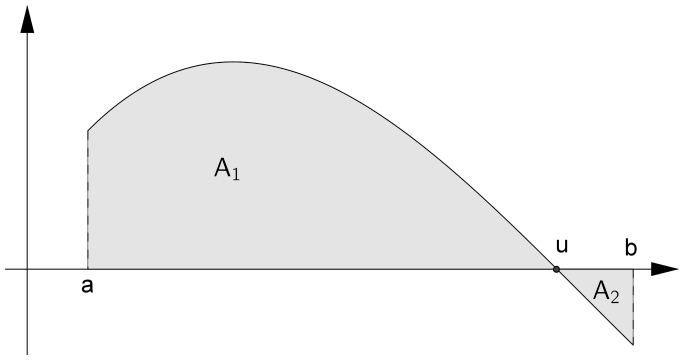
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

- $x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x, ..., \quad x_n = x_{n-1} + \Delta x$
- c_1 al punto arbitrario en el intervalo $[x_0, x_1]$, c_2 al punto arbitrario en el intervalo $[x_1, x_2]$,..., c_n al punto arbitrario en el intervalo $[x_{n-1}, x_n]$

La suma

$$f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + ... + f(c_n)\Delta x$$

se llama **suma de Riemann** y resulta ser la diferencia entre la suma de las áreas de los rectángulos que están ubicados sobre el eje x y la suma de las áreas de los rectángulos que están ubicados bajo el eje x.



Se observa que cuando el número n de subintervalos aumenta, la suma $f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + ... + f(c_n)\Delta x$ se va aproximando al número $A_1 - A_2$, lo que es equivalente a escribir

$$\lim_{n\to\infty} (f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + ... + f(c_n)\Delta x) = A_1 - A_2$$

16.5.2. Definición

La integral definida de una función continua $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es el número que se obtiene calculando

$$\lim_{n\to\infty} (f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + ... + f(c_n)\Delta x).$$

Este número no depende de los puntos arbitrarios c_i elegidos. La integral definida de una función continua $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se escribe:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Observaciones:

Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, el número $\displaystyle\int_a^b f(x) \geq 0$ y resulta el área bajo la curva entre a y b (área de la región encerrada por la gráfica de $f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x).

Anexo

Uso de software como herramienta complementaria

Para algunos de los ejercicios que aparecen al final de cada capítulo se sugiere el uso de software del siguiente modo:

- Los ejercicios señalados con $\otimes$ pueden resolverse utilizando un software de matemática dinámica. El programa recomendado es GeoGebra que se descarga de:
  `http://www.geogebra.org/cms/es/`

- Los ejercicios señalados con $\odot$ pueden resolverse utilizando un software de algebra computacional. El programa recomendado es Maxima pero no de un modo directo sino que a partir de la interface gráfica wxMaxima que se descarga de:
  `http://andrejv.github.io/wxmaxima/`

Comentarios

Entre los numerosos programas que se utilizan en Matemática, podríamos hacer una clasificación simple en dos categorías:

- Sistemas de Álgebra Computacional que permiten cálculos simbólicos y numéricos. Por ejemplo: Maple, Mathematica, MatLab entre los comerciales y Maxima, Scilab y Octave entre los de dominio público. Los comandos se introducen con el teclado.

- Sistemas de Matemática Dinámica. Estos entornos permiten la introducción directa en la ventana gráfica de objetos geométricos y la representación dinámica de los mismos. Por ejemplo: GeoGebra, Cabri, Regla y Compás y otros. Los comandos se introducen, fundamentalmente, con el ratón.

Luego de evaluar una serie de programas para utilizar como complemento para este libro se empezó por descartar los propietarios o comerciales (Mathematica, Matlab, Maple, Cabri, etc.) ya que nos parece adecuada la distribución libre. De los restantes, Maxima, Sage, Octave, Scilab, GeoGebra, CAR, CARMetal, GeoNext, etc. nuestra recomendación es Maxima como sistema de álgebra computacional y Geogebra como sistema de matemática dinámica.

Las razones, entre otras, para decidirnos por el uso de Software Libre están basadas en las libertades asociadas a este tipo de proyectos:

- Libertad de ejecutarlo para cualquier propósito.

- Libertad de estudiar cómo trabaja, y cambiarlo a voluntad de quien lo usa.

- Libertad de redistribuir copias.

- Libertad de mejorarlo y publicar sus mejoras y versiones modificadas en general.

Tomando como fuente las presentaciones de los programas recomendados, en sus respectivos sitios Web, se presenta el siguiente resumen:

Maxima

Maxima es un sistema para la manipulación de expresiones simbólicas y numéricas, incluyendo diferenciación, integración, expansión en series de Taylor, transformadas de Laplace, ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas de ecuaciones lineales, y vectores, matrices y tensores. Maxima produce resultados con alta precisión usando fracciones exactas y representaciones con aritmética de coma flotante arbitraria. Adicionalmente puede graficar funciones y datos en dos y tres dimensiones.

El código fuente de Maxima puede ser compilado sobre varios sistemas incluyendo Windows, Linux y MacOS X. El código fuente para todos los sistemas y los binarios precompilados para Windows y Linux están disponibles en el Administrador de archivos de SourceForge.

Maxima es un descendiente de Macsyma, el legendario sistema de álgebra computacional desarrollado a finales de 1960 en el instituto tecnológico de Massachusetts (MIT). Este es el único sistema basado en el esfuerzo voluntario y con una comunidad de usuarios activa, gracias a la naturaleza del open source. Macsyma fue revolucionario y muchos sistemas posteriores, tales como Maple y Mathematica, estuvieron inspirados en él.

La rama Maxima de Macsyma fue mantenida por William Schelter desde 1982 hasta su muerte en 2001, en 1998 obtuvo el permiso para liberar el código fuente bajo la licencia pública general (GPL) de GNU.

GeoGebra

GeoGebra es un software libre de matemática para la educación disponible en múltiples plataformas. Reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo e incluso recursos de probabilidad y estadística, en un único entorno sencillo a nivel operativo y muy potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraica general y simbólica, estadísticas y de organización en tablas y planillas dinámicamente vinculadas. Ha recibido numerosas distinciones y ha sido galardonado en Europa y USA en organizaciones y foros de software educativo.

Síntesis de Posibilidades:

- Gráficos, tablas y representaciones algebraicas dinámicamente conectadas.
- Interfaz de operatoria simple que da acceso a multiples y potentes opciones.
- Herramientas de autoría para crear materiales de enseñanza.
- Completo respaldo en español del programa y su manual.
- Libre, de código abierto.

Bibliografía

Kreyszig E. *Matemáticas avanzadas para ingeniería.* Limusa Wiley, 2010.

Lang S. *Cálculo I.* Fondo Educativo Interamericano, 1976.

Larson R. *Precalculo.* Cengage Learning, 2012.

Leithold L. *Algebra y Trigonometria con Geometria Analitica.* Oxford University Press, 1994.

Sagastume Berra A. Fernández G. *Álgebra y cálculo numérico.* Kapelusz, 1960.

Smith S. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.* Prentice Hall, 1998.

Smith S. *Álgebra.* Pearson Educación, 2001.

Spivak M. *Calculus. Calculo Infinitesimal.* Reverte, 2012.

Stewart J. *Cálculo, conceptos y contextos.* Cengage Learning Editores,

2006.

Stewart, Redlin, Watson *Precalculo (Matemáticas para el Cálculo)* Cengage Learning Editores, 2007.

Swokowski E. Cole J. *Trigonometria*. Cengage Learning. Thomson Internacional, 2001.

Zill D. *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*. Cengage Learning, 2009.

Zill D. Dewar J. *Algebra y Trigonometría*. Mac Graw Hill, 2001.

Zill D. Wright W. *Calculo de una variable. Trascendentes tempranas*. Mac Graw Hill, 2011.