Ejercicios resueltos
Funciones: dominio, gráfica e imagen

El objetivo de este apunte es resolver algunos ejercicios de ejemplo, similares a los del comienzo de la práctica del capítulo 4, discutiendo un poco cómo encararlos y cómo resolverlos. En los mismos usaremos contenidos vistos en éste y en los anteriores capítulos.

Ejercicio:

1) Hallar el **dominio**, **graficar** y determinar la **imagen** de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3$ b) $g(x) = -x^2 + 2x + 3$ c) $h(x) = \frac{1}{x+1} + 2$ d) $s(x) = \sqrt{2-x} - 1$

Resolución:

1) El ejercicio nos pide calcular el **dominio** de varias funciones, realizar sus respectivas **gráficas** y luego para cada función determinar su **imagen**. Primero entonces recordemos un poco qué son cada uno de estos términos.

El **dominio** de una función es el mayor conjunto de números reales para el cual tiene sentido calcular la función (ver página 48 del libro de cátedra). En otras palabras son los valores que puede tomar x en la función y para los cuales podemos realizar la cuenta. Las únicas restricciones de ese estilo que tenemos *por ahora* son que **nunca podemos dividir por cero**, y que las **raíces de índice par tienen que tener argumentos positivos** (es decir que lo que está dentro de la raíz tiene que ser mayor o igual a cero, siempre y cuando la raíz sea de índice par). Las raíces de índice impar no sufren esta restricción.
Más adelante veremos otro tipo de funciones que tienen otros tipos de restricciones de domino.
Para hacer referencia al dominio de una función, por ejemplo la función f, en estas notas se usará la notación: $Dom(f)$.

La **gráfica** de una función f es el conjunto de puntos del plano de la forma $(x, f(x))$ (ver página 49 del libro de cátedra). En otras palabras serán todos los puntos cuya primer coordenada sea algún valor del dominio de la función y su segunda coordenada sea el valor que le corresponde por la función f.
Para la gráfica de algunas funciones tal vez debamos recurrir a los conceptos vistos en los capítulos 2 y 3.

La **imagen** de una función es el conjunto de valores que toma la misma (ver página 49 del libro de cátedra). Si tenemos la gráfica de la función, estos valores se pueden ver mirando qué valores toma la función sobre el eje y. Para hacer referencia a la imagen de una función, por ejemplo la función f, en estas notas se usará la notación: $Im(f)$.

Discutiremos más de esto en cada uno de los ejemplos.

a) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3$

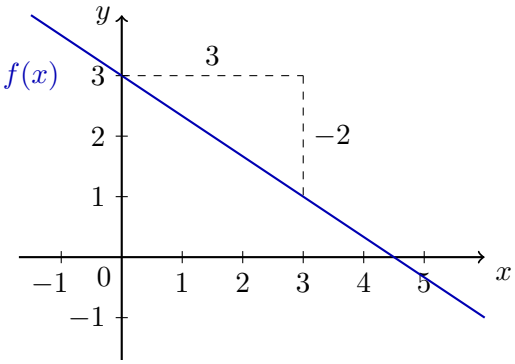
En este caso nos encontramos ante una **función lineal** y por lo tanto su dominio serán todos los números reales (ya que no hay ningún valor de x para el que no se pueda hacer la cuenta). Es decir:

$$\boxed{Dom(f) = \mathbb{R}}$$

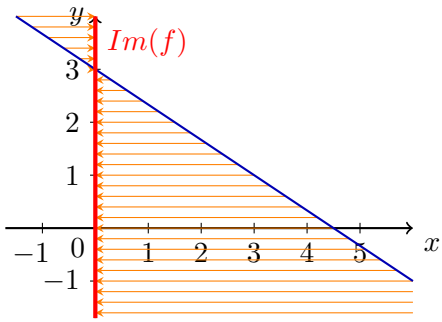
Por otro lado, como la **función es lineal**, su **gráfica será una recta** (ver páginas 23 a 26 del libro de cátedra). Para graficarla entonces lo haremos de la misma forma que graficábamos rectas (como vieron en el curso de nivelación), ya sea usando la información de la **pendiente** y la **ordenada al origen** o buscando dos puntos de la recta.

En este caso tenemos que graficar una recta con **ordenada al origen 3** (que nos indica dónde corta la función al eje y) y una **pendiente** de **−2/3**, que nos indica que por cada 3 unidades que nos movamos hacia la derecha nos deberemos mover 2 unidades hacia abajo (nótese que el numerador me indica el deplazamiento en la dirección del eje y y el numerador el desplazamiento en la dirección del eje x, y el signo se lo asignamos a uno solo de estos valores).

De esta forma la gráfica de f sería:



Si miramos ahora entonces todos los valores que toma la función sobre el eje y, podemos ver claramente que en este caso, como la recta continúa indefinidamente, la imagen de la función f será todos los reales. Esta idea puede "verse" en la figura de al lado, donde hemos marcado en lineas naranjas horizontales la proyección de algunos de los valores de la función sobre el eje y, y sobre este mismo eje hemos marcado la imagen de la función en rojo. En los siguientes ejemplos tal vez se entienda mejor esta idea. **Aclaración:** todo lo que está marcado en naranja y en rojo ustedes no lo deben escribir en su gráfico, pero es algo que pueden pensar a la hora de tener que determinar la imagen de una función.



Por lo tanto:

$$\boxed{Im(f) = \mathbb{R}}$$

b) $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

En este caso nos encontramos ante una **función cuadrática**, y por lo tanto su dominio serán también todos los números reales (esto pasa en general con cualquier función polinómica), ya que nuevamente no habrá ningún valor de x para el cual no se pueda realizar esa cuenta. Es decir que:

$$\boxed{Dom(g) = \mathbb{R}}$$

Sabemos por otro lado que, al ser una **función cuadrática** su **gráfica será una parábola**. Para graficar una parábola hay varios métodos. Ya vieron en el capítulo 3 que una forma de graficarlas es en base a su ecuación canónica, viendo dónde está el vértice y hacia dónde apuntan las ramas. Si en este caso pensamos a $y = g(x)$, entonces obtenemos la siguiente ecuación:

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

Y si completamos cuadrados y llevamos a la forma canónica (ver ejemplo página 39 del libro de cátedra) obtenemos:

$$-(x-1)^2 = y - 4$$

Que podemos ver que es una parábola con vértice $V(1, 4)$, eje vertical y las ramas hacia abajo.

Otra forma en que a veces podemos graficar una parábola es en base a la intersección de esta con los ejes (cuando los tenga).

Para ver dónde la función interseca al eje y, debemos cuánto vale la función en $x = 0$, es decir:

$$\text{Intersección con el eje } y \quad \Rightarrow \quad g(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

Por lo tanto la función corta al eje y en el punto $(0, 3)$.

Para ver dónde la función interseca al eje x, debemos ver dónde la función vale 0, es decir:

$$\text{Intersección con el eje } x \quad \Rightarrow \quad g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \quad \text{ó} \quad x_2 = 3$$

Por lo tanto la función corta al eje x en los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$.
Luego además, como las parábolas son simétricas, la coordenada x del vértice (h) será el promedio de las coordenadas x de estos puntos, es decir:

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

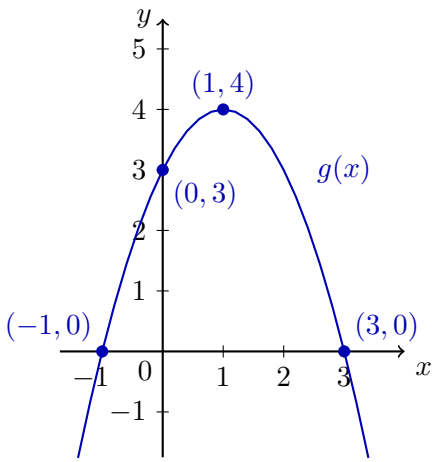
Y la coordenada y del vértice (k) vendrá dada por el valor que tome la función en h, es decir:

$$k = g(h) = g(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 4$$

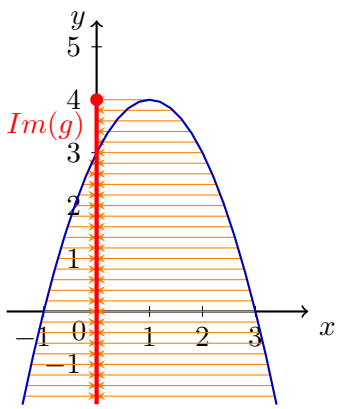
Por lo tanto podemos ver que esta parábola tiene vértice $V(1, 4)$.

Aclaración: No es necesario que realicen los dos métodos par determinar el vértice y ver cómo es la gráfica. A veces uno de los dos métodos es más práctico que el otro. Por ejemplo, a veces la parábola no corta a uno de los ejes, y en esos casos es mejor recurrir al primer método. Incluso pueden combinar métodos, encontrando el vértice como en el primer método, y luego encontrando alguna intersección con algún eje.

Por lo tanto la gráfica de $g(x)$ resulta:



Si vemos ahora los valores que toma la función sobre el eje y, podemos ver que en este caso no podrá tomar cualquier valor. Vemos que claramente la función nunca toma un valor superior a 4, pero sin embargo sigue indefinidamente hacia los valores negativos. Nuevamente esto puede verse si nos imaginamos que trasladamos horizontalmente todos los puntos de la función hacia el eje y (marcado aquí con flechas naranjas, pero ustedes no deben graficarlas, sólo imaginarlas, al igual que la imagen de la función que aquí la marcamos en rojo, pero ustedes tampoco deben marcarla así).
Por lo tanto la imagen de la función g resulta:



$$\boxed{Im(g) = (-\infty, 4]}$$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x+1} + 2$

En este caso tenemos una función donde aparece una fracción con nuestra incógnita en el denominador. Como sabemos que no podemos dividir por 0, deberemos tener esto en cuenta para calcular el dominio de la función. En este caso el denominador se anula cuando:

$$x + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1$$

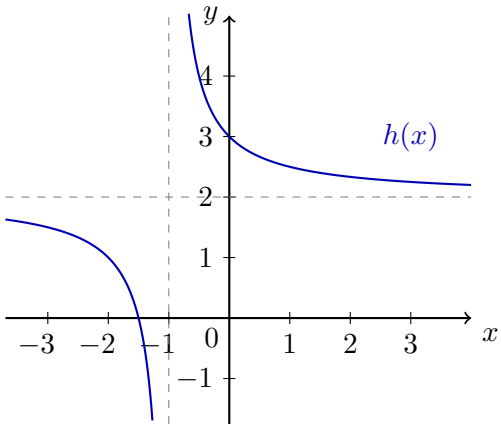
Entonces esta función estará definida para cualquier número **excepto** el -1. Por lo tanto resulta que:

$$\boxed{Dom(h) = \mathbb{R} - \{-1\}}$$

Por otro lado, para realizar la gráfica de esta función podemos ver que si hacemos $y = h(x)$ nos queda la ecuación:

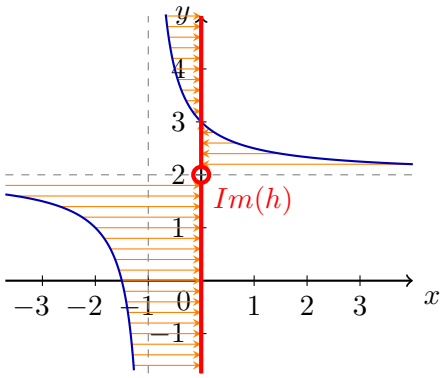
$$y = \frac{1}{x+1} + 2 \qquad \Rightarrow \qquad y - 2 = \frac{1}{x+1}$$

Que es la ecuación de una hipérbola, con centro $C(-1, 2)$, con constante $t = 1$ y con un numerador de signo positivo, entonces su gráfica será (ver páginas 40 a 43 del libro de cátedra):



Nótese que la línea punteada vertical que trazamos para graficar la hipérbola coincide con el valor de x que no está en el dominio de la función. **Siempre que una función tenga un valor que no esté en su dominio, la gráfica de la función no podrá cruzar por encima de este valor**.

Si analizamos ahora los valores que toma la función sobre el eje y, podemos ver que la función crece indefinidamente tanto para valores positivos como para valores negativos. Sin embargo, si miramos con cuidado, vemos que hay un valor que la función nunca toma, que en este caso es 2. Este valor coincide con la recta horizontal punteada que trazamos para graficar la hipérbola, y este será el único valor que no estará en la imagen de la función h.
Recuerden que el gráfico que se muestra aquí al lado contiene muchos elementos que ustedes no deben graficar, pero si que pueden pensar a la hora de determinar la imagen de una función.



En este caso entonces tenemos que:

$$\boxed{Im(h) = \mathbb{R} - \{2\}}$$

d) $s(x) = \sqrt{2-x} - 1$

En este caso nos encontramos con una función que tiene una raíz de índice par y nuestra variable se encuentra dentro de su argumento. Por esta razón, esta función estará definida cuando el argumento de dicha raíz sea positivo (o cero). Por lo tanto, para ver el dominio de la función s:

$$s(x) = \sqrt{\underbrace{2-x}_{\geq 0}} - 1 \quad \Rightarrow \quad 2 - x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \geq x \quad \Rightarrow \quad x \leq 2$$

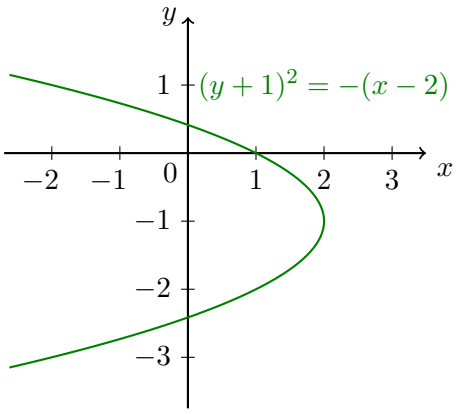
Por lo tanto el dominio de la función s resulta:

$$\boxed{Dom(s) = (-\infty, 2]}$$

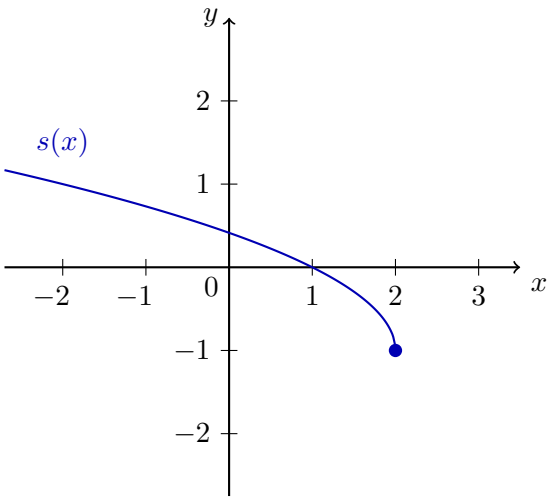
Ahora bien, para trazar la gráfica de esta función, podemos nuevamente recurrir a pensar a $y = s(x)$ y analizar la ecuación que nos queda, para ver si se corresponde con algo que conozcamos. La ecuación que nos queda sería:

$$y = \sqrt{2-x} - 1 \quad \Rightarrow \quad y + 1 = \sqrt{2-x} \quad \Rightarrow \quad (y+1)^2 = -x + 2 \quad \Rightarrow \quad (y+1)^2 = -(x-2)$$

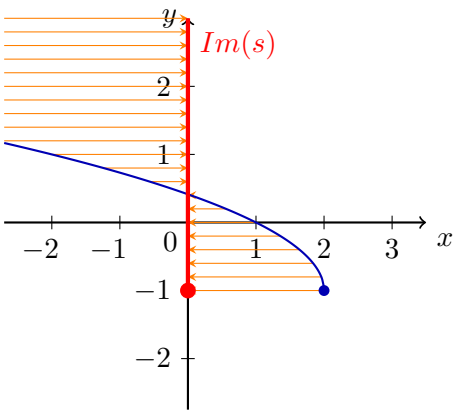
Que se trata de la ecuación de una parábola con vértice $V(2, -1)$, eje horizontal y las ramas hacia la izquierda (ver páginas 39 y 40 del libro de cátedra). Pero si analizamos el gráfico de esta parábola (ver imagen contigua), podemos apreciar que **este gráfico no puede corresponder a la gráfica de una función, ya que para un mismo valor de x hay más de un valor de y**. Sin embargo la gráfica de $s(x)$ estará relacionada con esta parábola. En este caso (como la raíz tiene adelante un signo positivo implícito) se tratará de la rama superior de dicha parábola. Si en cambio nuestra función hubiese sido $t(x) = -\sqrt{2-x} - 1$ su gráfica hubiese sido la rama inferior.



Por lo tanto la gráfica de $s(x)$ resulta:



Si ahora observamos los valores que toma la función sobre el eje y, podemos ver que nunca toma valores por debajo de -1, pero sin embargo crece indefinidamente hacia arriba. También podríamos hacer el mismo análisis que veníamos haciendo hasta ahora, imaginando que trasladamos horizontalmente los puntos de la gráfica y viendo qué conjunto determinarían éstos sobre el eje y.

De cualquiera de las dos formas obtenemos que la imagen de la función s resulta:

$$\boxed{Im(s) = [-1, +\infty)}$$