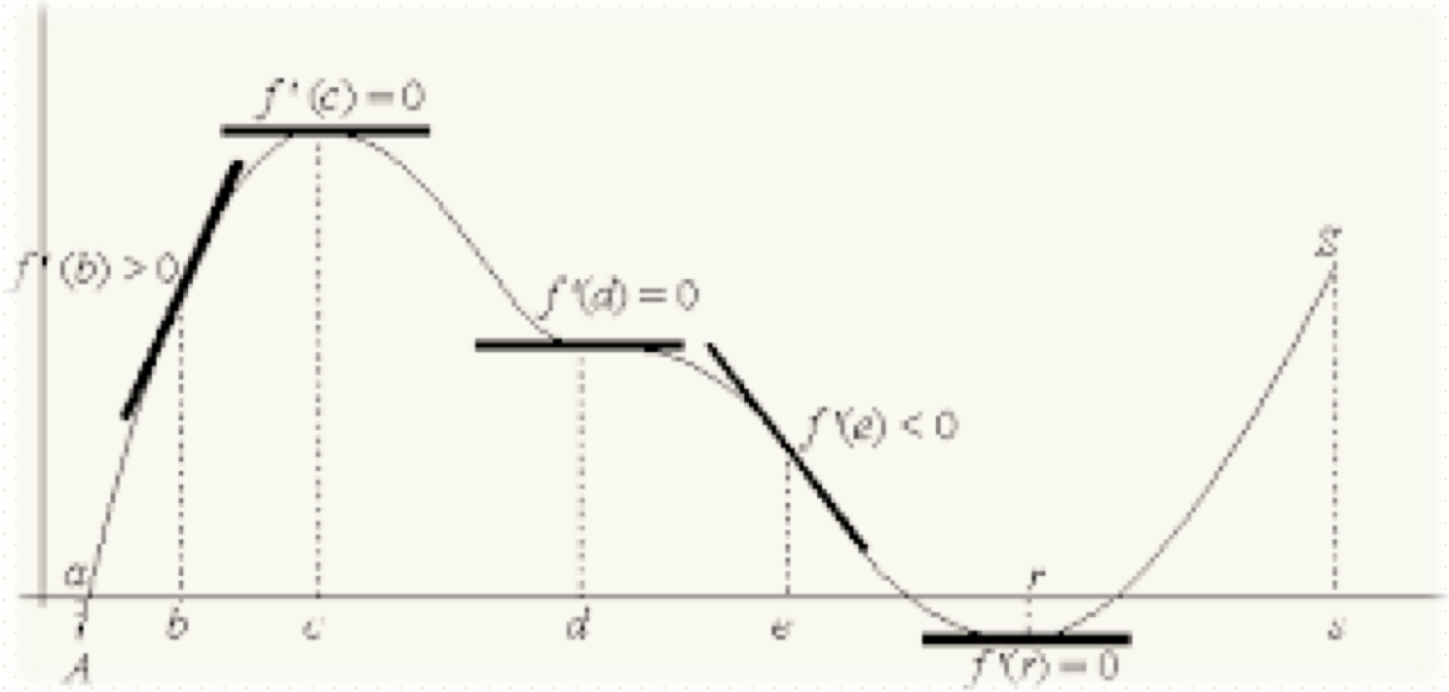
Matemática

Capítulo 14 Extremos de una función



Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

En este archivo vas a encontrar los siguientes ejercicios resueltos:

1) Determinar los intervalos donde $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 + 1$ es creciente o decreciente y los extremos relativos de f(x).

2) Hallar los máximos y mínimos absolutos de la función anterior en el intervalo [- 1, 1]

3) ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que se puede construir con 25 cm de hilo de modo que tenga área máxima?

1) Determinar los intervalos donde $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 + 1$ es creciente o decreciente y los extremos relativos de f.

$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 + 1$ es una función polinómica con Dom = R es continua y derivable en R . Su derivada también es continua en R.

Para analizar los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

- Calculamos su derivada:

$$f'(x) = 2\,x^3 - 3x^2 - 2\,x$$

- Buscamos los puntos críticos

$$f'(x) = 0$$

$2\,x^3 - 3x^2 - 2\,x = 0$ debemos resolver esta ecuación.

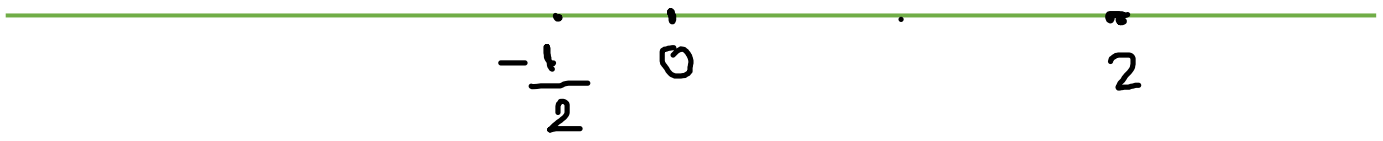
- Resolvemos

$x\,(2\,x^2 - 3x - 2\,) = 0$ entonces $x = 0$ o $(2\,x^2 - 3x - 2\,) = 0$

Luego nos queda que $x = 0, x = 2\ y\ x = -\frac{1}{2}$ son números críticos de la función.

- Analizamos el signo de la derivada para determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento

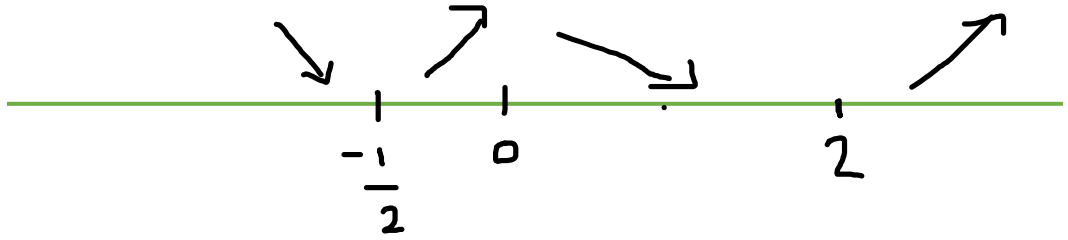
Teniendo en cuenta los números críticos dividimos en intervalos al dominio de f(x) y analizamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos



$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $(0,2)$ y $(2, +\infty)$

	Signo de $f^{\prime}(x)$ (tomamos un número cualquiera de intervalo , evaluamos en la derivada y analizamos su signo)	Comportamiento de *f (x)*
$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	-1 es un número del intervalo dado, evalúo en $f^{\prime}(x)$ $f^{\prime}(-1) < 0$	$f\ es\ decreciente$
$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	-1/4 es un número del intervalo dado, evalúo en $f^{\prime}(x)$ $f^{\prime}(-1/4) > 0$	$f\ es\ creciente$
$(0,2)$	1 es un número del intervalo dado,, evalúo en $f^{\prime}(x)$ $f^{\prime}(1) < 0$	$f\ es\ decreciente$
$(2, +\infty)$	3 es un número del intervalo dado, evalúo en $f^{\prime}(x)$ $f^{\prime}(3) > 0$	$f\ es\ creciente$

- Indicamos los extremos relativos



Entonces en $x = -\frac{1}{2}$, $f(x)$ *toma un valor mínimo relativo y es* $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{29}{32}$

$x = 0$, $f(x)$ *toma un valor máximo relativo y es* $f(0) = 1$

$x = 2$, $f(x)$ *toma un valor mínimo relativo y es* $f(2) = -3$

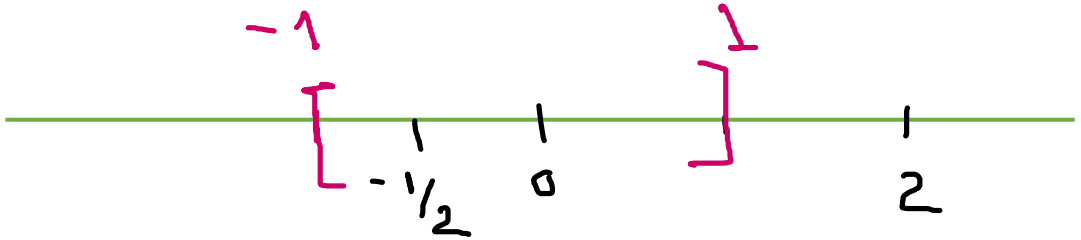
2) Hallar los máximos y mínimos absolutos de la función anterior en el intervalo [-1, 1]

Teniendo en cuenta el Teorema de la *pág.80* del libro vamos a hallar los extremos absolutos en el intervalo [−1, 1]

- Buscamos los puntos críticos

Este paso ya lo hicimos en el ejercicio anterior y sabemos que son en $x = 0, x = 2\ y\ x = -\frac{1}{2}$

- Analizamos si los puntos se encuentran en el intervalo dado



En este caso los números críticos que pertenecen al intervalo dado son el 0 y -1/2

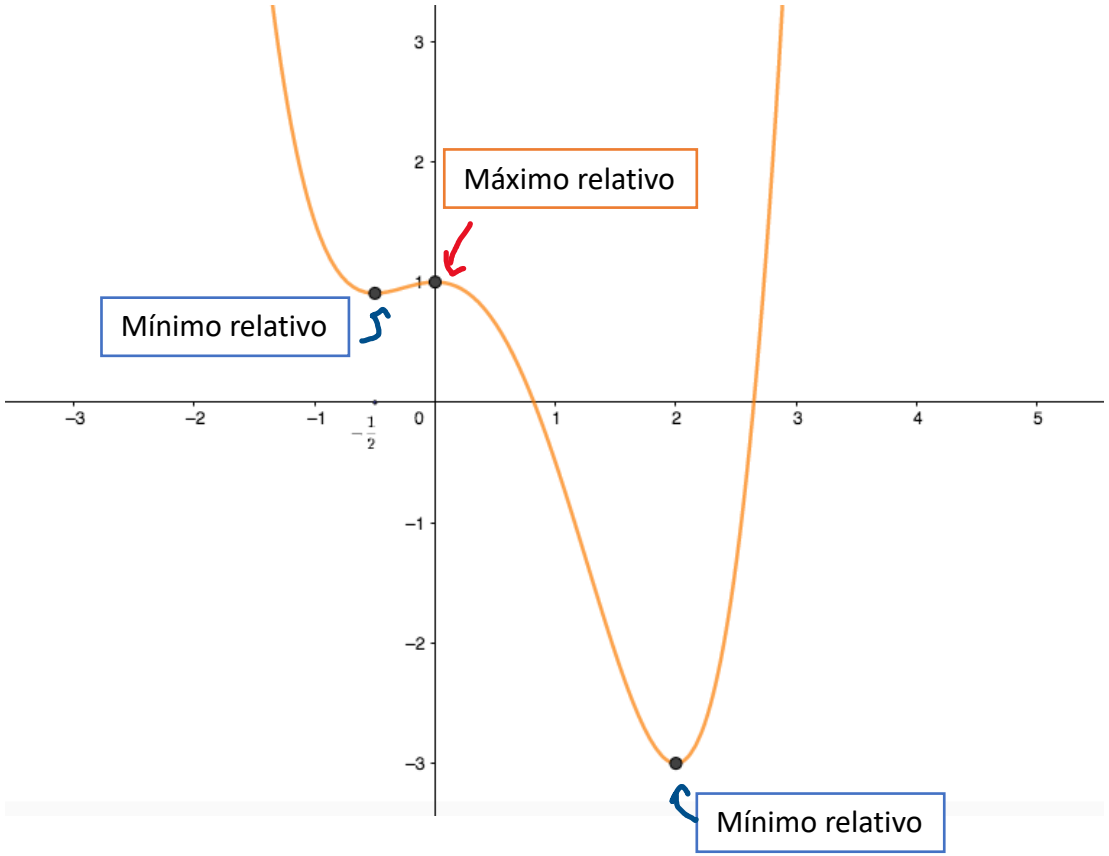
- Determinamos los extremos absolutos en el intervalo dado

Tener en cuenta que f(x) es una función continua y el intervalo es un intervalo cerrado

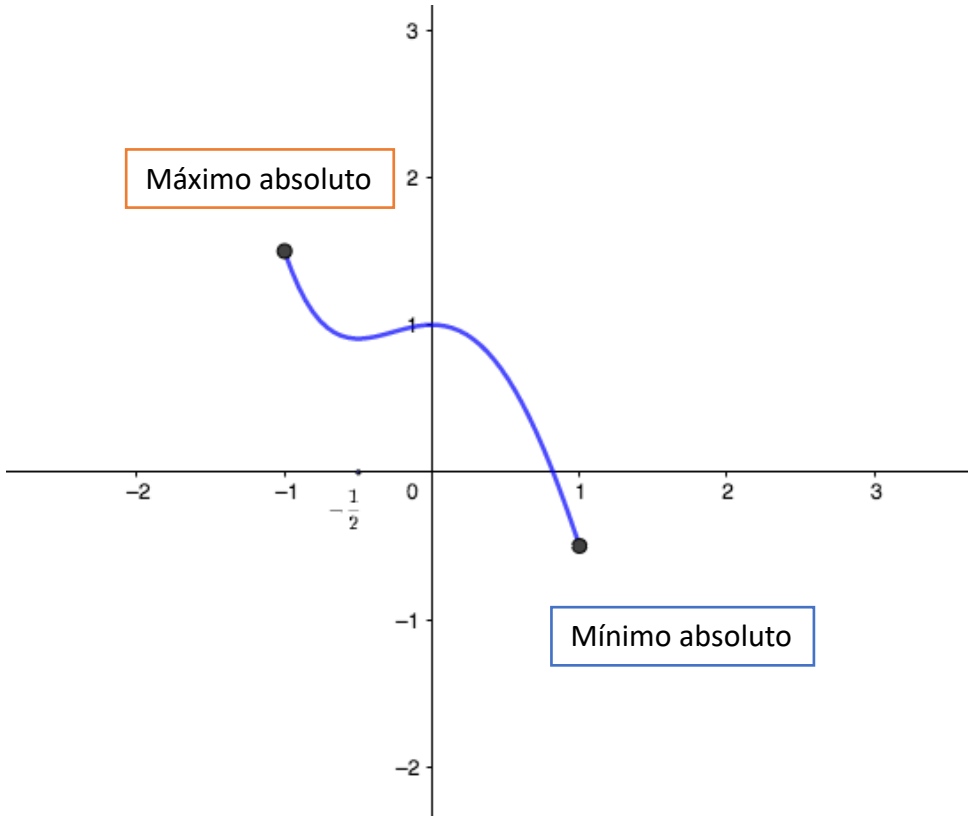
Máximo absoluto de f(x) en el intervalo

	x	f(x)
Extremo del intervalo	-1	3/2
Extremo del intervalo	1	-1/2
Punto crítico	$-1/2$	29/32
Punto crítico	0	1

Mínimo absoluto de f(x) en este intervalo



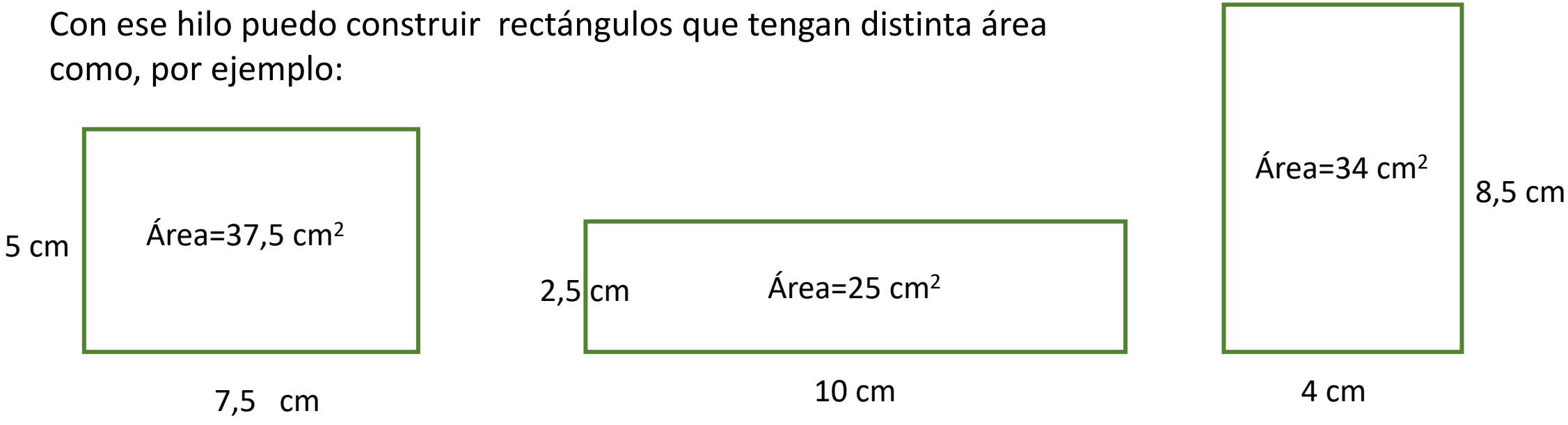
Extremos relativos de la función en todo su dominio



Extremos absolutos de la función en el intervalo cerrado dado

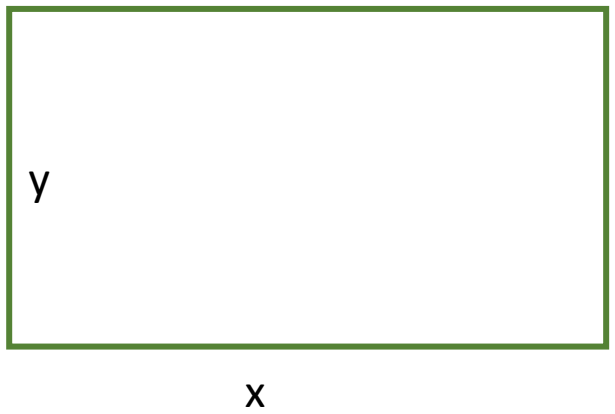
3) ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que se puede construir con 25 cm de hilo de modo que tenga área máxima?

Con ese hilo puedo construir rectángulos que tengan distinta área como, por ejemplo:



El área depende del valor de los lados y cambia. La suma de los lados da siempre 25.

A continuación, vamos a plantear el problema:



Sabemos que el hilo mide 25 cm.
Eso lo expresamos simbólicamente como:

$$2x + 2y = 25$$

Además, queremos que el área sea máxima (la fórmula depende de ambos lados)

$$A = x\,y$$

Para poder "maximizar el área" vamos a hacer que dependa de una sola variable

$$A = x\,y$$

$2x + 2y = 25$ podemos despejar y $2y = 25 - 2x$

$$y = \frac{25}{2} - x$$

De esta forma, el área depende de una única variable $\mathrm{A(x)} = \left(\frac{25}{2} - x\right)x$

Si evaluamos A(7,5)=37,5 ; A(10)=25; A(4)=34 obtenemos el área de los rectángulos hicimos al principio

Vamos a estudiar cuando la función $\mathrm{A(x)} = \left(\frac{25}{2} - x\right)x$ toma su valor máximo

<u>Dominio</u>: $x \geq 0$

y también se cumple que $\left(\frac{25}{2} - x\right) \geq 0$

$-x \geq -\frac{25}{2}$

$x \leq \frac{25}{2}$ por lo tanto el Dom es $[0, \frac{25}{2}]$

A(x) es una función continua, por ser una función cuadrática. El intervalo donde vamos a buscar el máximo es el intervalo cerrado $[0, \frac{25}{2}]$.

<u>Puntos críticos:</u>

$$\mathrm{A(x)} = \left(\frac{25}{2} - x\right)x = \frac{25}{2}x - x^2$$

$$A'(\mathrm{x}) = \frac{25}{2} - 2x$$

$$A'(\mathrm{x}) = 0$$

$$\frac{25}{2} - 2x = 0$$

$$x = \frac{25}{4}$$

Hay un posible extremo de la función en

$$x = \frac{25}{4}$$

Extremos de la función:

Como el dominio de la función es un intervalo cerrado, y es continua en dicho intervalo.
A(x) tomará su valor máximo en los extremos del intervalo o en el punto crítico

	x	$A(x)$
Extremo del intervalo	0	0
Extremo del intervalo	$25/2$	0
Punto crítico	$25/4$	$625/16$

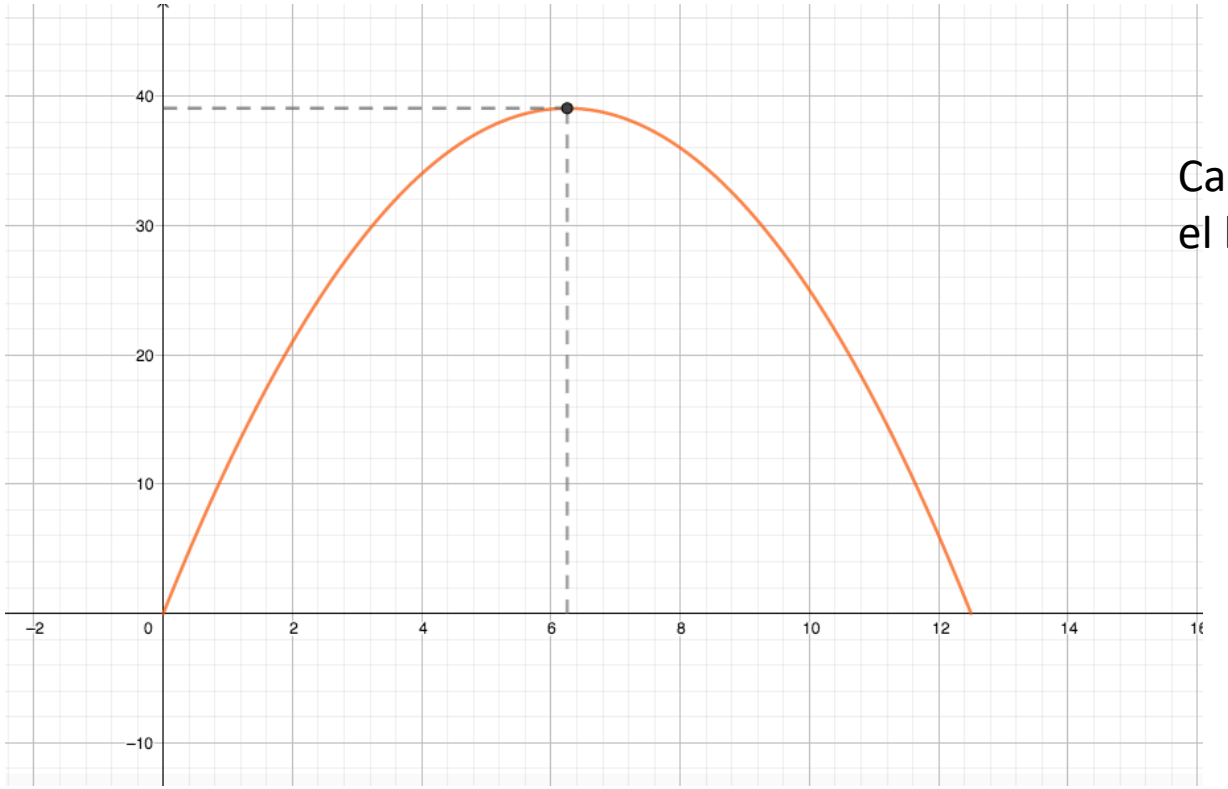
Por lo tanto, el valor del área es máxima cuando $x = \frac{25}{4}(6{,}25\ cm)$

Cómo $y = \frac{25}{2} - x$ reemplazamos e y $= \frac{25}{4}$

El valor máximo del área es $\frac{625}{16}$ $(\ 39{,}0625\ cm^2)$

Por lo tanto, el rectángulo de área máxima que se puede construir con un hilo de 25 cm es un “cuadrado” cuyos lados miden 25/4 (6,25 cm)

Si graficamos $\mathrm{A(x)} = \frac{25}{2}x - x^2 \; en \; [0, \frac{25}{2}] \; obtenemos$



Cada punto de la gráfica es (x, A(x)) y nos indica el lado x del rectángulo y el área de dicho rectángulo.