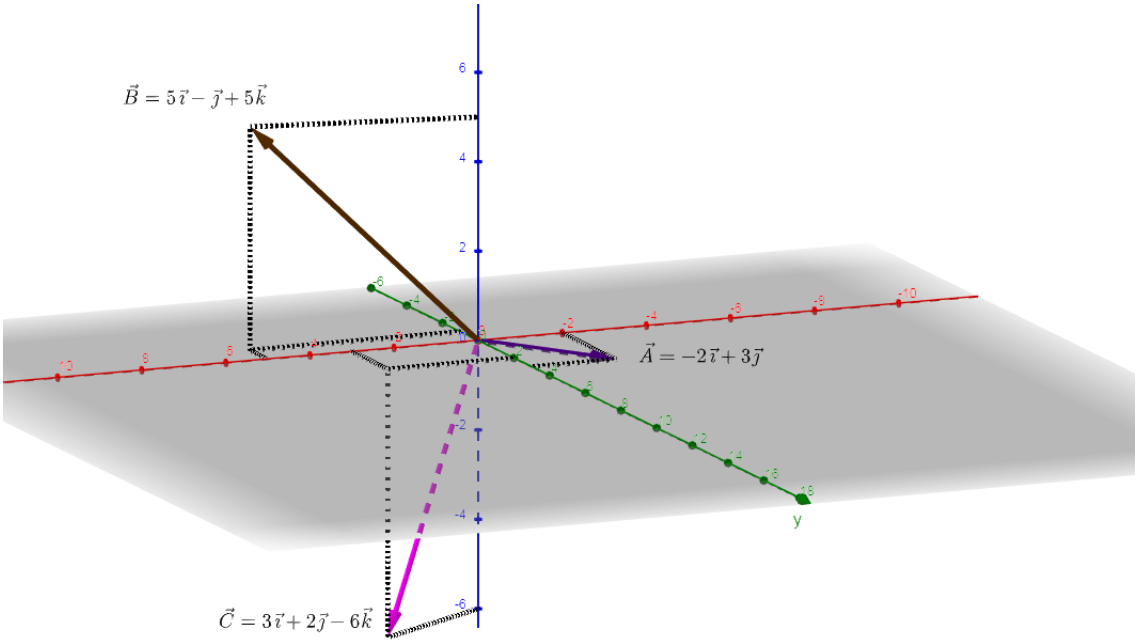
Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. UNLP. Matemática. 2020
Capítulo 9. Algunos ejercicios resueltos:
1. b) c) , 3 , 5 , 9 , 15 , 19 , 20

1. **(Ej 1. b) c))** Dados $\vec{A} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ $\vec{B} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 5\vec{k}$ y $\vec{C} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 6\vec{k}$ representarlos gráficamente y calcular:
   - $(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} = ((-2)5 + 3(-1) + 0\,5)\vec{C} = -13\vec{C} = \langle -39, -26, 78 \rangle$
   - $(\vec{A} + \vec{C}) \cdot \vec{B} = \langle 1, 5, -6 \rangle \cdot \langle 5, -1, 5 \rangle = -30$
   - Gráfica de los tres vectores



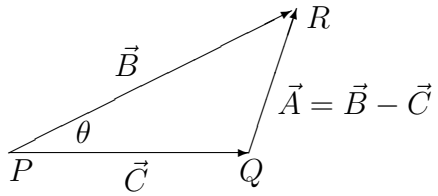
2. **(Ej 3.)** Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman un ángulo de $\pi/3$. Sabiendo que $|\vec{A}| = 3$ y $|\vec{B}| = 4$, calcular $|\vec{A}+\vec{B}|$. (Recordar que $|\vec{A}+\vec{B}|^2 = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$).

   $|\vec{A}+\vec{B}|^2 = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} =$

   $= |\vec{A}|^2 + 2\vec{B}\cdot\vec{A} + |\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\pi/3 + |\vec{B}|^2 =$

   $= 3^2 + 2.3.4.\frac{1}{2} + 4^2 = 37$

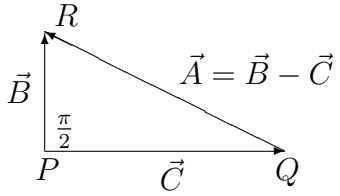
3. **(Ej 5.)** a) Demostrar el teorema del coseno. Tener en cuenta que los lados pueden considerarse como vectores que cumplan $\vec{A} = \vec{B} - \vec{C}$. Luego realizar el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{A} = (\vec{B}-\vec{C})\cdot(\vec{B}-\vec{C})$, de esta igualdad se obtiene la fórmula buscada.



   $|\vec{A}|^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} = (\vec{B}-\vec{C})\cdot(\vec{B}-\vec{C}) =$
   $\vec{B}\cdot\vec{B} - \vec{B}\cdot\vec{C} - \vec{C}\cdot\vec{B} + \vec{C}\cdot\vec{C} = |\vec{B}|^2 - 2\vec{B}\cdot\vec{C} + |\vec{C}|^2 =$
   Entonces

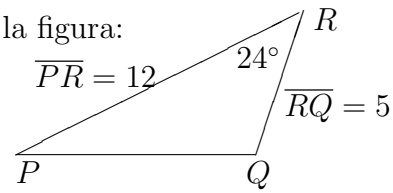
$$|\vec{A}|^2 = |\vec{B}|^2 - 2|\vec{B}||\vec{C}|\cos\theta + |\vec{C}|^2 =$$

   b) Del teorema anterior obtenga el teorema de Pitágoras como caso particular.
   Es el caso en que $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ y entonces el teorema del coseno queda



$$|\vec{A}|^2 = |\vec{B}|^2 + |\vec{C}|^2$$

c) Resolver el triángulo de la figura:

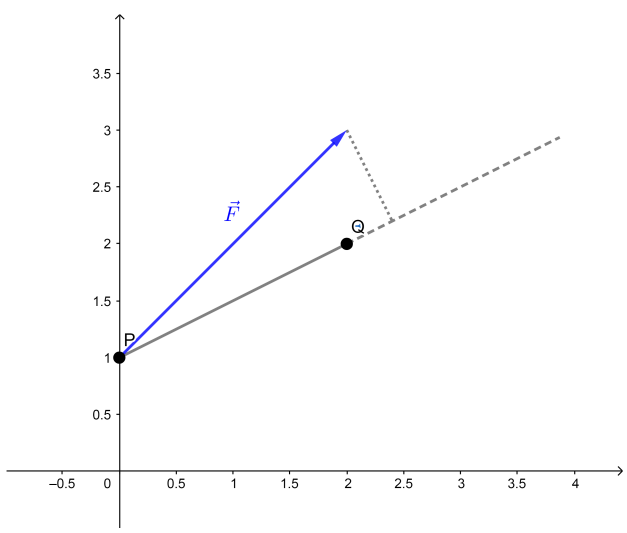


$\overline{PR}$ y $\overline{RQ}$ son las longitudes de los segmentos con extremos en los puntos $P\ R$ y $R\ Q$ respectivamente.
Aplicando el teorema del coseno:

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PR}|^2 - 2|\overrightarrow{PR}||\overrightarrow{QR}|\cos 24^\circ + |\overrightarrow{QR}|^2$$

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = 12^2 - 2.12.5.\cos 24^\circ + 5^2 = 144 - 120\cos 24^\circ + 25$$

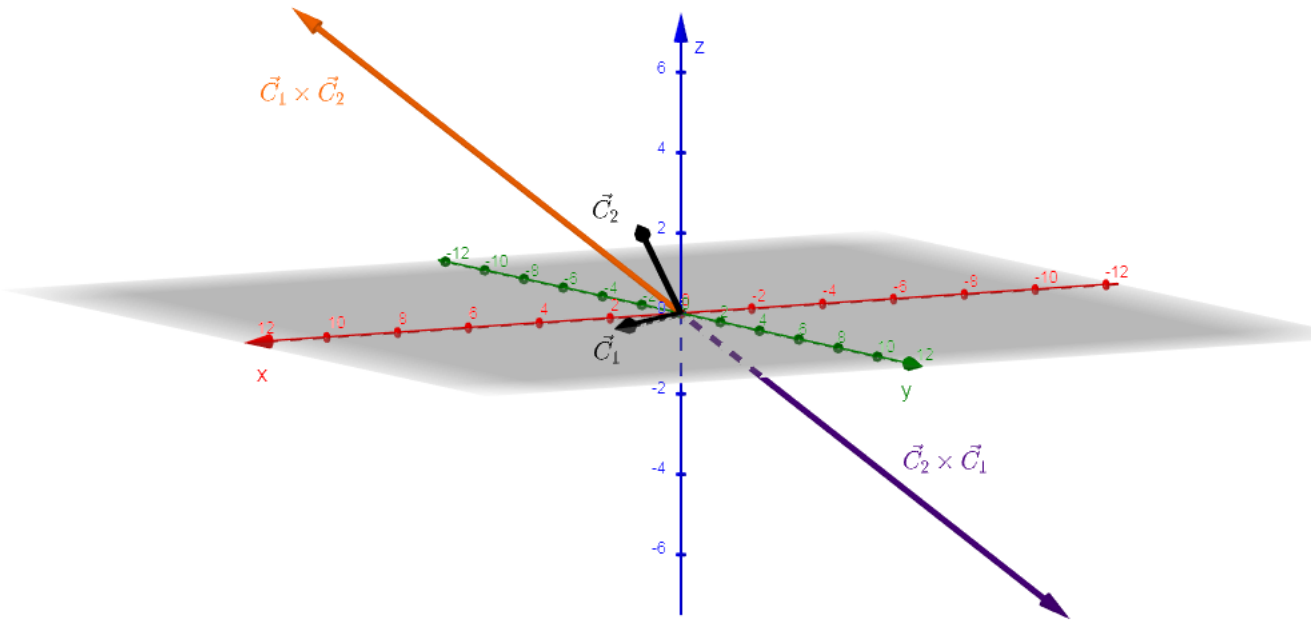
4. **(Ej 9.)** $\vec{F} = \langle 2, 2\rangle$ es una fuerza. Calcular el trabajo realizado por $\vec{F}$ sobre un objeto que se desplaza sobre una recta desde $P(0, 1)$ hasta $Q(2, 2)$. Graficar.



El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 2\rangle \cdot \langle 2, 1\rangle = 6$$

5. **(Ej 15.)** Representar en un gráfico los siguientes vectores:
c) $\vec{C}_1 = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 0\vec{k}, \quad \vec{C}_2 = 4\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}, \quad \vec{C}_1 \times \vec{C}_2, \quad \vec{C}_2 \times \vec{C}_1$



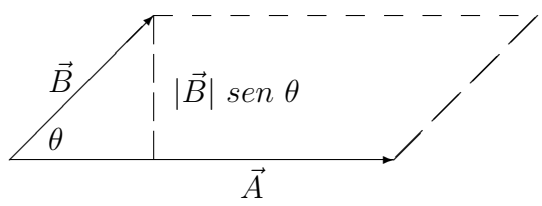
$$\vec{C}_1 \times \vec{C}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{\imath} - 9\vec{\jmath} + 7\vec{k}$$

$$\vec{C}_2 \times \vec{C}_1 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6\vec{\imath} + 9\vec{\jmath} - 7\vec{k} = -(\vec{C}_1 \times \vec{C}_2)$$

6. **(Ej 19.)** Hallar el área del paralelogramo que tiene por lados adyacentes a los vectores
$\vec{A} = \langle 1, 2, 0 \rangle$ y $\vec{B} = \langle 3, 2, 1 \rangle$

Recordar que: El módulo de $\vec{A} \times \vec{B}$ representa el área del paralelogramo que tiene a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como lados concurrentes, como se muestra en el gráfico:

$$\textbf{Area = base . altura} = |\vec{A}||\vec{B}|\text{sen } \theta = |\vec{A} \times \vec{B}|$$



En este caso los lados del paralelogramo son los vectores $\vec{A} = \langle 1, 2, 0 \rangle$ y $\vec{B} = \langle 3, 2, 1 \rangle$

Entonces el área del paralelogramo es:

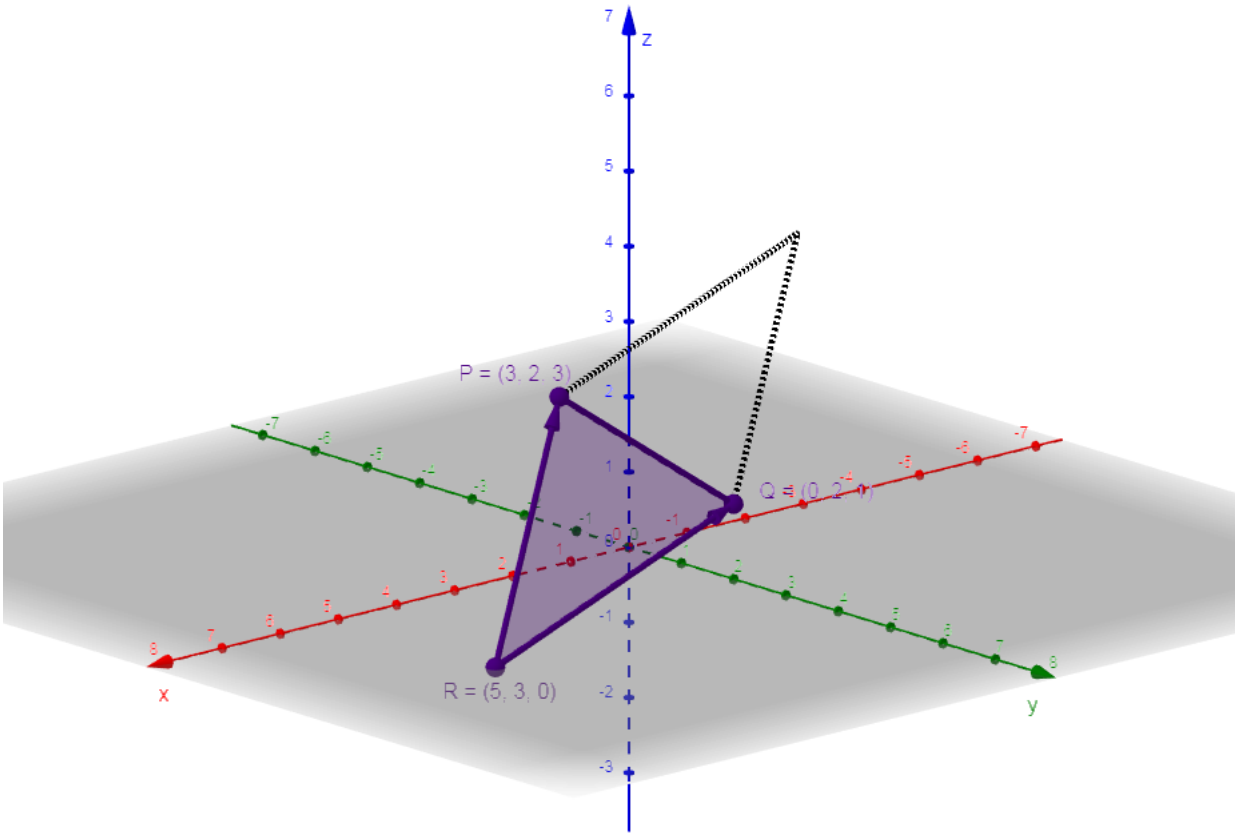
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\, \langle 1, 2, 0 \rangle \times \langle 3, 2, 1 \rangle \,|$$

Puesto que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} - 4\vec{k}$$

$$\boxed{\text{El área es:} \quad |2\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} - 4\vec{k}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}}$$

7. **(Ej 20.)** Graficar y hallar el área del triángulo de vértices: $P(3,2,3)$, $Q(0,2,1)$, $R(5,3,0)$.



Consideremos los vectores $\overrightarrow{RQ} = \langle -5, -1, 1\rangle$ y $\overrightarrow{RP} = \langle -2, -1, 3\rangle$

En este caso, el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo cuyos lados son estos dos vectores.

Como en el ejercicio anterior, el área del paralelogramo es: $|\overrightarrow{RQ} \times \overrightarrow{RP}|$
En este caso

$$\overrightarrow{RQ} \times \overrightarrow{RP} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -5 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2\vec{\imath} + 13\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

El área del triángulo es $\boxed{\frac{1}{2}|-2\vec{\imath} + 13\vec{\jmath} + 3\vec{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 13^2 + 3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{182}}$