Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. UNLP. Matemática. 2020
Capítulo 7. Sistemas de ecuaciones lineales.

- Ejemplo de sistema lineal:

$$\begin{cases} \overbrace{8}^{a_{11}} x_1 \overbrace{-2}^{a_{12}} x_2 + x_3 - 7x_4 = & 30 \\ -4x_1 \overbrace{-1}^{a_{23}} x_3 = & \frac{4}{5} \\ -3x_1 - x_2 \overbrace{+4}^{a_{33}} x_3 + x_4 = & 6 \end{cases}$$

Matriz del sistema

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & -7 \\ -4 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada del sistema

$$A^* = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & -7 & 30 \\ -4 & 0 & -1 & 0 & \frac{4}{5} \\ -3 & -1 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 30 \\ \frac{4}{5} \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Calcular el rango de una matriz

a) Si la matriz es **cuadrada**.

Calculamos el determinante:

A **es cuadrada de** $n \times n$	$\det A \neq 0$: rango $A = n$ $\det A = 0$: rango $A < n$

Ejemplos:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

A es una matriz de 3×3 y

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$$

En este caso decimos que: $\boxed{\textbf{rango A} = \mathbf{3}}$

2) $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & -6 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

B es una matriz de 4×4 y

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & -6 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

En este caso **rango B** $< \mathbf{4}$

Para saber el rango B.

Para empezar extraemos una submatriz de B cuadrada de 3×3. Por ejemplo:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

Entonces, ya que encontramos una submatriz de B de 3×3 con determinante distinto de 0, podemos concluir que $\boxed{\textbf{rango B} = \mathbf{3}}$

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

C es una matriz de 3×3 y

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Extraemos una submatriz de C cuadrada de 2×2. Por ejemplo:

$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

Lo anterior no alcanza para concluir cual es el rango de C :

Tenemos que buscar submatrices 2×2. hasta que suceda una de las dos situaciones:

a) Encontrar una con determinante distinto de cero.
b) Verificar que todas las submatrices (9 en total) tienen determinante igual a cero.

En el ejemplo de la matriz C:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \ , \ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0 \ , \ \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Aunque hay varias submatrices con determinante igual a 0 encontramos una de ellas cuyo determinante es 6.

En este caso podemos concluir que $\boxed{\textbf{rango C} = \mathbf{2}}$

4) $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Si calculamos los determinantes de las 9 submatrices de 2×2 que se pueden extraer de D veremos que todos son cero.

Por lo tanto: $\boxed{\textbf{rango D} = \mathbf{1}}$

b) Si la matriz A es **rectangular** de $m \times n$.
El rango de A será menor o igual que el menor de los números m y n

Calcular su rango consiste en extraer submatrices cuadradas hasta encontrar alguna con determinante distinto de cero.

Ejemplos:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Como es una matriz de 2×3 : rango $A \leq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Por lo tanto: $\boxed{\textbf{rango A} = \mathbf{2}}$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Como es una matriz de 3×2 : rango $B \leq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \ , \ \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ , \ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto: $\boxed{\textbf{rango B} = \mathbf{1}}$

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 6 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Como es una matriz de 3×4 : rango $C \leq 3$

En este caso: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$

Por lo tanto: $\boxed{\textbf{rango C} = \mathbf{3}}$