Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. UNLP. Matemática. 2020
Capítulo 7. Sistemas de ecuaciones lineales. Resolución por sustitución y por el método de Gauss-Jordan

Resolver el sistema de ecuaciones lineales por reducción del número de ecuaciones por sustitución

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = & 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = & 0 \end{cases}$$

- Existencia de soluciones:

  Analizamos si existen soluciones usando el teorema de Rouché Frobenius y Corolario, para esto calculamos el rango de la matriz del sistema y de la matriz ampliada: A es una matriz de 2×3 entonces su rango será a lo sumo 2. Para saber su rango analizamos submatrices de A de 2×2:

  $$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

  Como el determinante de A_1 es distinto de cero:

  $$\text{rango} A = 2$$

  Con respecto a la matriz ampliada que es 2×4 su rango será a lo sumo 2 y como A_1 también es submatriz de A^*:

  $$\text{rango} A^* = 2$$

  Entonces, por el corolario:

  $$\text{rango} A = \text{rango} A^* = 2 < 3 \text{ (cantidad de incógnitas del sistema)}$$

  se concluye que el sistema tiene infinitas soluciones.

- Encontrar las soluciones del sistema por sustitución:
  De la primera ecuación:

  $$x_1 = 3x_2 + x_3 + 3 \tag{1}$$

  Sustituyendo en la segunda ecuación:

  $$3(3x_2 + x_3 + 3) + x_2 + x_3 = 0$$

  Que es equivalente a:

  $$10x_2 + 4x_3 + 9 = 0$$

  Y entonces:

  $$x_3 = \frac{-9 - 10x_2}{4}$$

  Volviendo a (1)

  $$x_1 = 3x_2 + \frac{-9 - 10x_2}{4} + 3$$

  $$x_1 = \frac{3 + 2x_2}{4}$$

  Las infinitas soluciones del sistema son:

  $$\left(\frac{3 + 2x_2}{4}, x_2, \frac{-9 - 10x_2}{4} \right)$$

  Para cualquier valor de x_2

Resolver el sistema de ecuaciones lineales usando el método de Gauss - Jordan

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = & 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = & 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = & 4 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = & -6 \end{cases}$$

- Existencia de soluciones:

  Analizamos si existen soluciones usando el teorema de Rouché Frobenius y Corolario, para esto calculamos el rango de la matriz del sistema y de la matriz ampliada:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 18$$

  Como el determinante de la matriz del sistema es distinto de cero:

$$\text{rango}A = 4 = \text{rango}A^*$$

  Entonces el sistema tiene solución única.

- Encontrar la solución del sistema: Vamos transformando la matriz ampliada del sistema, mediante operaciones elementales, para ir obteniendo matrices ampliadas de sistemas equivalentes al original (con las mismas soluciones).

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

  Empezamos a hacer operaciones elementales:

  1. Dejamos la primera fila sin modificar y tratamos de obtener ceros en la primera columna, haciendo operaciones elementales con respecto a la primera fila (F1 es fila 1, F2 es fila 2,..., etc):

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F1}} \\ \xrightarrow{F2-3F1} \\ \xrightarrow{F3-F1} \\ \xrightarrow{F4} \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 0 & 10 & 4 & -10 & -9 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

  2. Dejamos la segunda fila sin modificar y tratamos de obtener ceros en la segunda columna, haciendo operaciones elementales con respecto a la segunda fila:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 4 & -10 & -9 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{10F1+3F2} \\ \xrightarrow{\mathbf{F2}} \\ \xrightarrow{10F3-F2} \\ \xrightarrow{5F4-F2} \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 10 & 0 & 2 & -10 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{4} & \mathbf{-10} & \mathbf{-9} \\ 0 & 0 & 36 & -10 & 19 \\ 0 & 0 & -9 & 5 & -21 \end{array}\right)$$

  3. Dejamos la tercera fila sin modificar y tratamos de obtener ceros en la tercera columna, haciendo operaciones elementales con respecto a la tercera fila:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 10 & 0 & 2 & -10 & 3 \\ 0 & 10 & 4 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 36 & -10 & 19 \\ 0 & 0 & -9 & 5 & -21 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{18F1-F3} \\ \xrightarrow{9F2-F3} \\ \xrightarrow{\mathbf{F3}} \\ \xrightarrow{4F4+F3} \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 180 & 0 & 0 & -170 & 35 \\ 0 & 90 & 0 & -80 & -100 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{36} & \mathbf{-10} & \mathbf{19} \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -65 \end{array}\right)$$

4. Dejamos la cuarta fila sin modificar y tratamos de obtener ceros en la cuarta columna, haciendo operaciones elementales con respecto a la cuarta fila:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 180 & 0 & 0 & -170 & 35 \\ 0 & 90 & 0 & -80 & -100 \\ 0 & 0 & 36 & -10 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -65 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F1+17F4} \\ \xrightarrow{F2+8F4} \\ \xrightarrow{F3+F4} \\ \xrightarrow{\mathbf{F4}} \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 180 & 0 & 0 & 0 & -1070 \\ 0 & 90 & 0 & 0 & -620 \\ 0 & 0 & 36 & 0 & -46 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{-65} \end{array}\right)$$

5. Multiplicamos la primera fila por $\frac{1}{180}$, la segunda por $\frac{1}{90}$, la tercera por $\frac{1}{36}$ y la cuarta por $\frac{1}{10}$:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 180 & 0 & 0 & 0 & -1070 \\ 0 & 90 & 0 & 0 & -620 \\ 0 & 0 & 36 & 0 & -46 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -65 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{1}{180}\mathbf{F1}} \\ \xrightarrow{\frac{1}{90}\mathbf{F2}} \\ \xrightarrow{\frac{1}{36}\mathbf{F3}} \\ \xrightarrow{\frac{1}{10}\mathbf{F4}} \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1070}{180} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{620}{90} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{46}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{65}{10} \end{array}\right)$$

La solución del sistema es

$$\left(-\frac{1070}{180}, -\frac{620}{90}, -\frac{46}{36}, -\frac{65}{10}\right)$$

Resolver el sistema de ecuaciones lineales usando el método de Gauss - Jordan: Forma triangular superior

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = & 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = & 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = & 4 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = & -6 \end{array}\right. \tag{2}$$

1. Dejamos la primera fila sin modificar y tratamos de obtener ceros en la primera columna, haciendo operaciones elementales con respecto a la primera fila (F1 es fila 1, F2 es fila 2,..., etc):

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F1}} \\ \xrightarrow{F2-3F1} \\ \xrightarrow{F3-F1} \\ \xrightarrow{F4} \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 0 & 10 & 4 & -10 & -9 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

2. Dejamos la primera y segunda fila sin modificar y tratamos de obtener ceros en la segunda columna, haciendo operaciones elementales con respecto a la segunda fila:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 4 & -10 & -9 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F1}} \\ \xrightarrow{\mathbf{F2}} \\ \xrightarrow{10F3-F2} \\ \xrightarrow{5F4-F2} \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{4} & \mathbf{-10} & \mathbf{-9} \\ 0 & 0 & 36 & -10 & 19 \\ 0 & 0 & -9 & 5 & -21 \end{array}\right)$$

3. Dejamos la primera, segunda y tercera fila sin modificar y tratamos de obtener ceros en la tercera columna, haciendo operaciones elementales con respecto a la tercera fila:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 4 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 36 & -10 & 19 \\ 0 & 0 & -9 & 5 & -21 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F1}} \\ \xrightarrow{\mathbf{F2}} \\ \xrightarrow{\mathbf{F3}} \\ \xrightarrow{4F4+F3} \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{4} & \mathbf{-10} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{36} & \mathbf{-10} & \mathbf{19} \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -65 \end{array}\right)$$

4. La última matriz es "triangular superior" (ceros debajo de la diagonal). Si reescribimos el sistema de ecuaciones (equivalente a (2)):

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = & 3 \\ 10x_2 + 4x_3 - 10x_4 = & -9 \\ 36x_3 - 10x_4 = & 19 \\ 10x_4 = & -65 \end{array}\right.$$

entonces:

$$\left\{\begin{array}{rl} x_4 = & -\frac{65}{10} \\ x_3 = & \frac{19+10\left(-\frac{65}{10}\right)}{36} = -\frac{46}{36} \\ x_2 = & \frac{-9+10\left(-\frac{65}{10}\right)-4\left(-\frac{46}{36}\right)}{10} = -\frac{620}{90} \\ x_1 = & 3 + 3\left(-\frac{620}{90}\right) + \left(-\frac{46}{36}\right) - 2\left(-\frac{65}{10}\right) = -\frac{1070}{180} \end{array}\right.$$