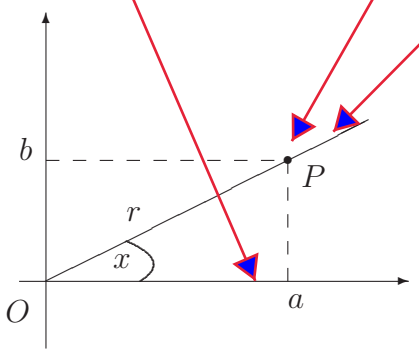
Capítulo 11

Funciones trigonométricas

11.1. Definiciones

Consideremos un ángulo, cuya medida x está en radianes, formado por el semieje positivo de las absisas y una semirrecta que parte del origen, seleccionemos un punto $P(a, b)$ sobre la semirrecta. El ángulo es positivo si la semirrecta gira en sentido antihorario y negativo en caso contrario.
Sea $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ la distancia del origen al punto $P(a, b)$. Definimos:

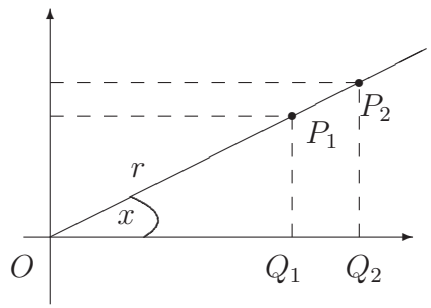


$$\text{sen } x = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{distancia de } P \text{ al origen}} = \frac{b}{r}$$

$$\cos x = \frac{\text{abscisa de } P}{\text{distancia de } P \text{ al origen}} = \frac{a}{r}$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{abscisa de } P} = \frac{b}{a}$$

Notar que los valores del seno y coseno de un ángulo son independientes del punto que se tome sobre la semirrecta que contiene al punto P :



Los triángulos $O\overset{\triangle}{P_1}Q_1$ y $O\overset{\triangle}{P_2}Q_2$ son semejantes y por lo tanto sus lados homólogos son proporcionales, es decir:

$$\frac{P_2Q_2}{OP_2} = \frac{P_1Q_1}{OP_1} = \operatorname{sen} x \qquad \frac{OQ_2}{OP_2} = \frac{OQ_1}{OP_1} = \cos x$$

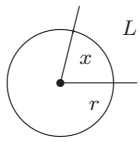
Por lo tanto las definiciones de estas dos funciones no dependen de la distancia al origen r y puede tomarse $r = 1$ entonces:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{sen } x = \text{ordenada del punto } P \qquad \cos x = \text{abscisa del punto } P \\ \text{tg } x = \dfrac{\text{ordenada del punto } P}{\text{abscisa del punto } P} \end{array}}$$

Una forma mas usual para expresar la función tangente es: $\boxed{\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}}$

11.1.1. Medida de ángulos en radianes

La medida de un ángulo x en radianes queda definida como el cociente entre la longitud del arco y la longitud del radio en cualquier circunferencia que tenga como centro el vértice del ángulo.



$$\boxed{x \text{ en radianes} = \frac{L}{r}}$$

Es fácil ver que si un ángulo mide 360° en el sistema sexagesimal entonces mide 2π radianes en el sistema que utilizaremos en este capítulo.

Esta relación permite pasar de un sistema de medición angular a otro (está mal escribir $2\pi = 360°$ ya que una igualdad debe ser homogénea en unidades).

11.1.2. Signos y valores

Considerando los signos de la abscisa y la ordenada del punto P entonces, según el cuadrante en el que se encuentre, los signos de las funciones trigonométricas de x serán:

cuadrante	seno	coseno	tangente
Primero: $0 < x < \pi/2$	$\operatorname{sen} x > 0$	$\cos x > 0$	$\operatorname{tg} x > 0$
Segundo: $\pi/2 < x < \pi$	$\operatorname{sen} x > 0$	$\cos x < 0$	$\operatorname{tg} x < 0$
Tercero: $\pi < x < 3\pi/2$	$\operatorname{sen} x < 0$	$\cos x < 0$	$\operatorname{tg} x > 0$
Cuarto: $3\pi/2 < x < 2\pi$	$\operatorname{sen} x < 0$	$\cos x > 0$	$\operatorname{tg} x < 0$

Para algunos ángulos es sencillo calcular los valores exactos de sus funciones trigonométricas, por ejemplo:

ángulo	seno	coseno	tangente
0	0	1	0
$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	no existe
π	0	-1	0
$3\pi/2$	-1	0	no existe
2π	0	1	0

Cuadro 11.1: Tabla de valores exactos.

11.1.3. Periodicidad de las funciones trigonométricas

Los ángulos que consideramos pueden pensarse formados por la rotación de la semirrecta que parte del origen y el semieje positivo de las abscisas, luego, cualquier par de ángulos que difieran uno de otro en un número entero de vueltas tendrían la misma abscisa y ordenada y por lo tanto los mismos valores para sus funciones trigonométricas. Decimos que las funciones seno y coseno son periódicas y que basta conocer sus valores entre 0 y 2π para obtener cualquier otro valor. Los periodos de cada función se verán en detalle mas adelante pero podemos decir que:
$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+2\pi k)$ y $\cos x = \cos(x+2\pi k)$ donde k es un número entero cualquiera.

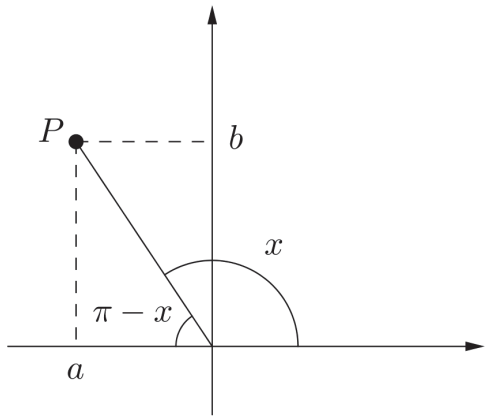
11.2. Reducción al primer cuadrante

Se pueden calcular los valores de las funciones trigonométricas de ángulos que están en el segundo, tercero o cuarto cuadrante, si se conocen los valores de las funciones de un ángulo adecuado en el primer cuadrante:

11.2.1. Angulo en el segundo cuadrante

Si x está en el segundo cuadrante $\pi - x$ está en el primer cuadrante entonces:

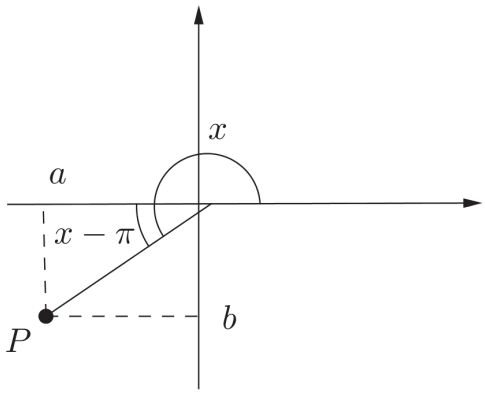
$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x) \qquad \cos x = -\cos(\pi - x) \qquad \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$$



11.2.2. Angulo en el tercer cuadrante

Si x está en el tercer cuadrante $x-\pi$ está en el primer cuadrante entonces:

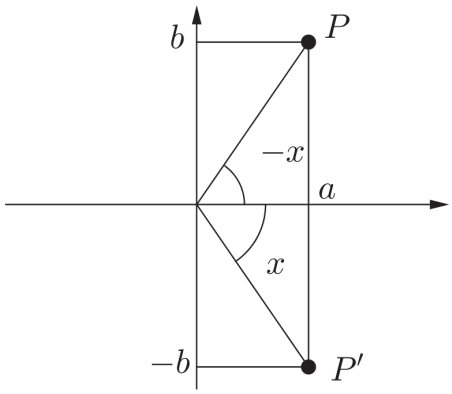
$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(x-\pi) \qquad \cos x = -\cos(x-\pi) \qquad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x-\pi)$$



11.2.3. Angulo en el cuarto cuadrante

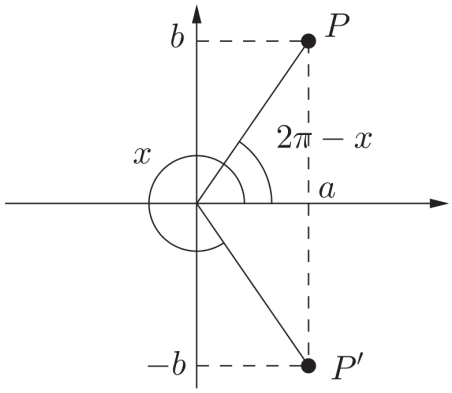
Si x está en el cuarto cuadrante, podemos considerarlo negativo según nuestra convención, luego $-x$ está en el primer cuadrante entonces:

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x) \qquad \cos x = \cos(-x) \qquad \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x)$$



Podríamos interpretar lo anterior del siguiente modo. Si x está en el cuarto cuadrante luego $2\pi - x$ está en el primer cuadrante entonces:

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x) \qquad \cos x = \cos(2\pi - x) \qquad \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(2\pi - x)$$



Observar: para cualquier valor de x:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1}$$

11.3. Dominio, imagen y gráficas

11.3.1. Dominio

Las funciones seno y coseno están definidas para cualquier número real x y por lo tanto ambas tienen por dominio el conjunto de los números reales. La función tangente está definida como un cociente entonces su dominio es el conjunto de los números reales que no anulan el denominador.

Como $t(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, su dominio es el conjunto de todos los números reales menos los de la forma $\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ donde n es un número entero $\left(\ldots -\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2} \ldots\right)$

valores en los que cos x = 0

11.3.2. Imagen

Los valores de las funciones seno y coseno están siempre entre -1 y 1 (recordar como están definidas), luego ambas tienen por imagen el intervalo $[-1, 1]$. La función tangente tiene como imagen a todos los números reales.

11.3.3. Periodo

Se ve que cada vuelta completa a la circunferencia tanto el seno como el coseno vuelven a tomar el mismo valor, es decir:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Por eso se dice que ambas funciones tienen **periodo** 2π.

En la función tangente

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$$

luego el periodo es π

En general si $f(x) = \operatorname{sen}(\omega x)$ tenemos:

$$\operatorname{sen}(\omega x) = \operatorname{sen}(\omega x + 2\pi) = \operatorname{sen}(\omega(x + \frac{2\pi}{\omega}))$$

luego

$$f(x) = f(x + \frac{2\pi}{\omega})$$

entonces $f(x)$ tiene **periodo** $\frac{2\pi}{\omega}$.

El mismo argumento puede usarse para la función $g(x) = \cos(\omega x)$.

En Física ω se llama frecuencia angular, al periodo se lo llama T y la inversa del periodo es la frecuencia ν, sintetizando:

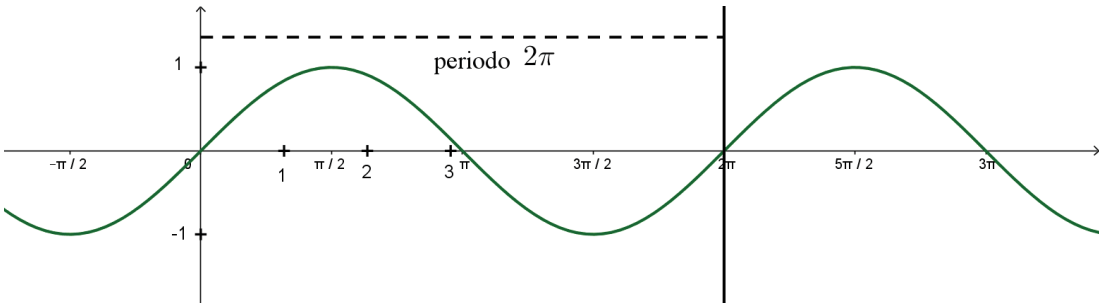
$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

.

11.3.4. Gráficas

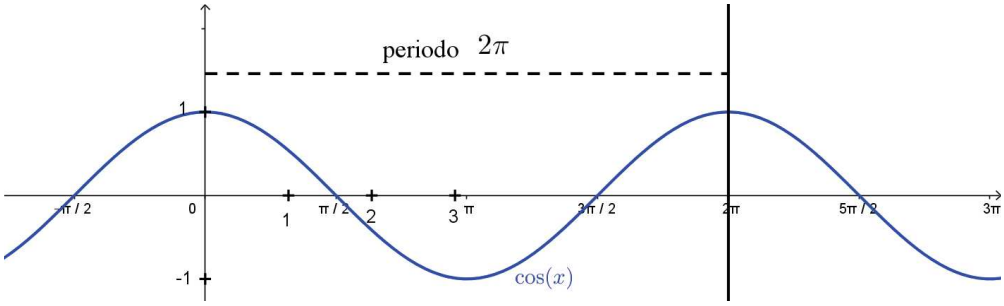
Gráfica de la función seno:

$$s(x) = \operatorname{sen} x$$



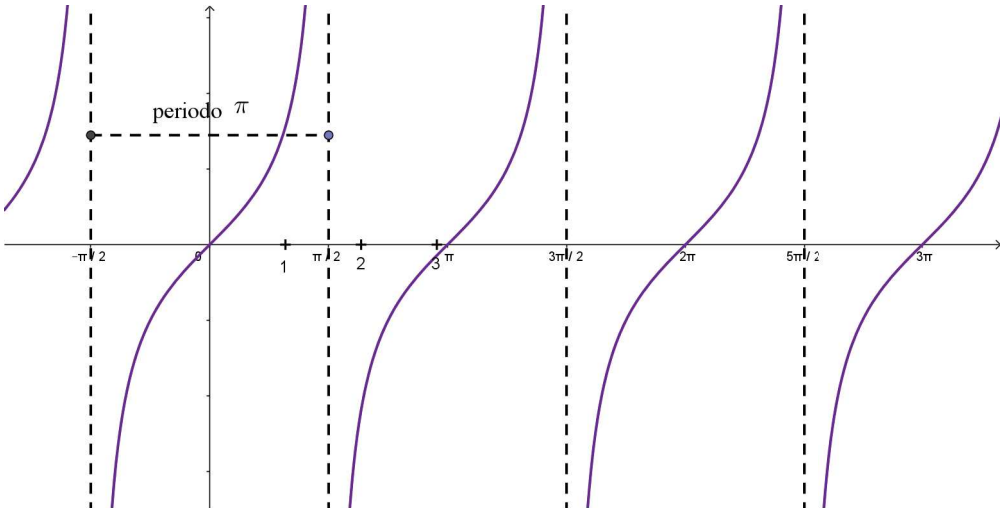
Gráfica de la función coseno

$$c(x) = \cos x$$



Gráfica de la función tangente

$$t(x) = \operatorname{tg} x$$



11.3.5. Ejemplos

1. Determinar para que valores de x la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ vale 0.

   $\operatorname{sen} x = 0$ para los ángulos: π, $-\pi$, 2π, -2π, 3π, -3π, ... Es decir que se anula para ángulos de la forma: $x = k\pi$, donde k es cualquier número entero.

2. Determinar para que valores de x la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ vale 1.

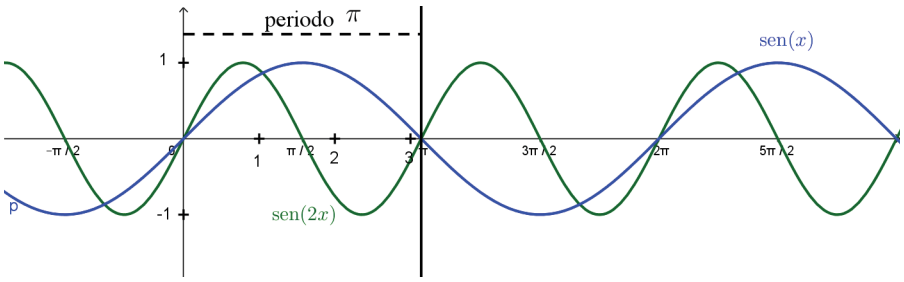
   $\operatorname{sen} x = 1$ para los ángulos: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} - 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi$, $\frac{\pi}{2} - 4\pi$, ... Es

decir que toma el valor 1 para ángulos de la forma: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, donde k es cualquier número entero.

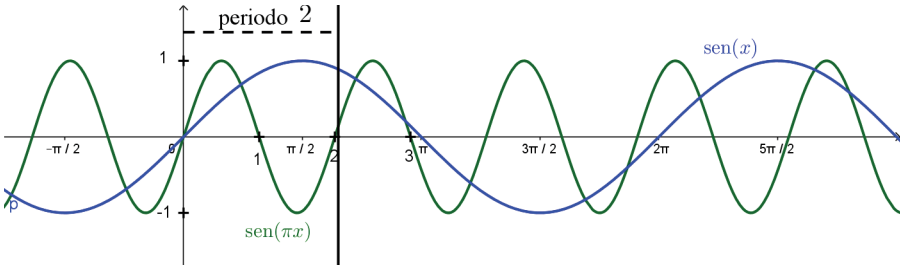
3. Determinar para que valores de x la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ vale -1.
   $\operatorname{sen} x = -1$ para los ángulos: $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi$, $-\frac{\pi}{2}-2\pi$, $-\frac{\pi}{2}+4\pi$, $-\frac{\pi}{2}-4\pi$, ...
   Es decir que toma el valor -1 para ángulos de la forma: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, donde k es cualquier número entero.

4. Determinar para que valores de x la función $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ vale 1.
   $\operatorname{sen}(2x) = 1$ cuando:
   $$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
   o sea cuando
   $$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$
   donde k es un número entero. Es decir que la función $f(x)$ vale 1 si x toma los valores: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$, ...

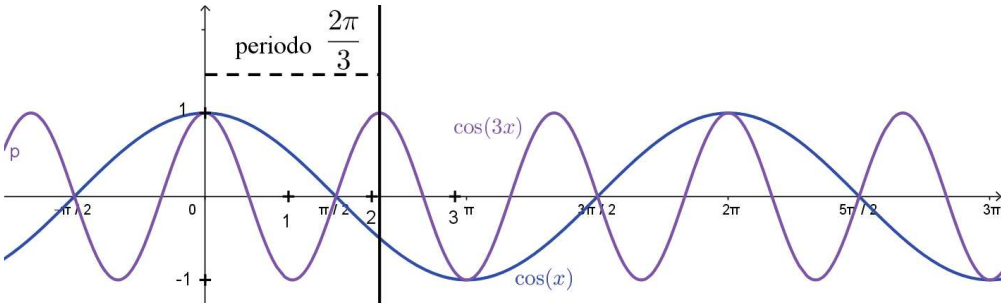
5. Si $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$, $\omega = 2$ y el periodo es $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.



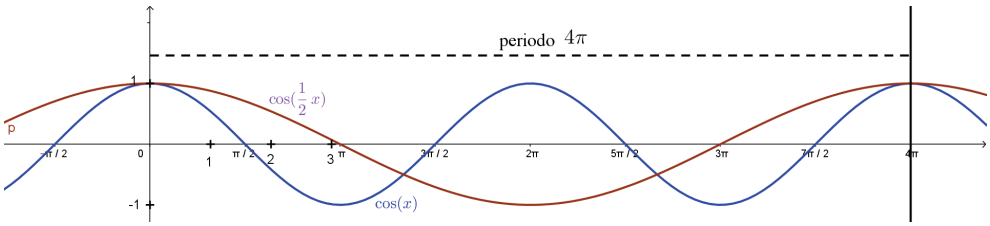
6. Si $g_1(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$, el periodo es $T = \frac{2\pi}{\pi}$.



7. Si $g_2(x) = \cos(3x)$, el periodo es $T = \frac{2\pi}{3}$.



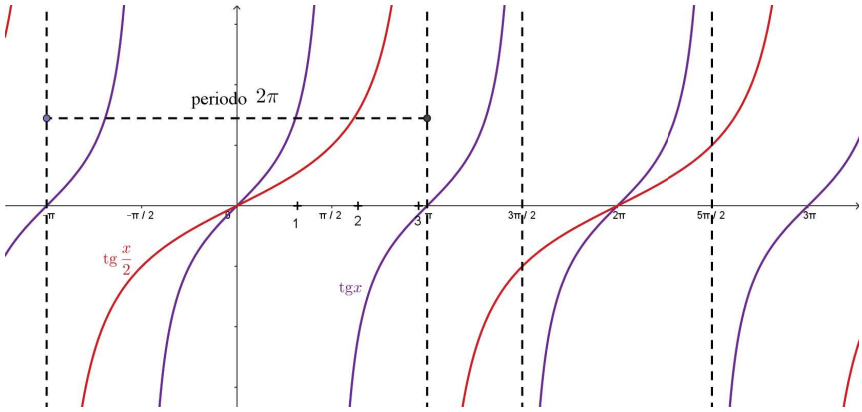
8. Si $g_3(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$, el periodo es $T = 4\pi$.



9. Si $g_4(x) = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$ entonces

$$g_4(x + 2\pi) = \mathrm{tg}(\frac{x + 2\pi}{2}) = \mathrm{tg}(\frac{x}{2} + \pi) = \mathrm{tg}(\frac{x}{2}) = g_2(x)$$

Luego $g_4(x)$ tiene periodo 2π



11.4. Ejercicios

1. Hallar en forma exacta (reducir al primer cuadrante y usar la tabla de valores exactos) para calcular los valores de las funciones seno y coseno:

   a) $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{4})$ b) $\operatorname{sen}(\frac{5\pi}{4})$ c) $\operatorname{sen}(\pi - \frac{\pi}{6})$

   d) $\cos(\pi + \frac{\pi}{6})$ e) $\cos(2\pi - \frac{\pi}{6})$ f) $\cos(\frac{5\pi}{4})$

2. Completar la siguiente tabla calculando los valores en forma exacta. Usar la tabla de valores exactos 11.1 y Reducción al primer cuadrante.

ángulo	seno	coseno	tangente
$2\pi/3$			
$3\pi/4$			
$5\pi/6$			
$7\pi/6$			
$5\pi/4$			
$7\pi/4$			
$-\pi/6$			
$-\pi/4$			

3. $\otimes$ $\odot$ En el mismo gráfico representar las funciones siguientes y determinar dominio e imagen:

   $s_1(x) = \operatorname{sen} x$ $s_2(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ $s_3(x) = 3 \operatorname{sen} x$ $s_4(x) = \operatorname{sen}(x + \pi)$

4. $\otimes$ $\odot$ Trazar las gráficas de las funciones siguientes. En cada caso estudiar para que valores de x la función vale 0, 1 y -1 y cuál es el periodo de cada función.

   a) $g_1(x) = \cos 2x$ b) $g_2(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ c) $g_3(x) = \cos \pi x$

   d) $g_4(x) = |\operatorname{tg} x|$ e) $g_5(x) = |\operatorname{sen} x|$ f) $g_6(x) = -2 \operatorname{sen}(x)$

   g) $g_7(x) = 4 \cos(2x)$ $g_8(x) = |\cos x|$

5. $\bigotimes$ $\bigodot$ Graficar las funciones :

$$g(x) = \begin{cases} 2\ \cos\ x & \text{si } x \leq -\pi \\ \operatorname{sen} x & \text{si } -\pi < x < \pi \\ \operatorname{sen}(2x) & \text{si } \pi \leq x \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{si } x \leq -2\pi \\ |\operatorname{sen} x| & \text{si } -2\pi < x < 2\pi \\ |\cos(2x)| & \text{si } 2\pi \leq x \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{si } x \leq -2 \\ -\operatorname{sen}(\pi x) & \text{si } -2 < x < 0 \\ \operatorname{tg}(x) & \text{si } 0 \leq x \end{cases} \qquad u(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1 \\ 3\cos(2\pi x) & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ |x-2| & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Aclaración: *La mayoría de los ejercicios pueden verificarse utilizando software del siguiente modo:*

Los señalados con $\bigotimes$ *pueden resolverse utilizando un software de matemática dinámica.*

Los señalados con $\bigodot$ *pueden resolverse utilizando software de algebra computacional.*

En el Anexo que aparece al final del libro se dan pautas sobre los programas recomendados para cada caso.