Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. UNLP. Matemática. 2020
Capítulo 10. Algunos ejercicios resueltos: Recta en el espacio

1. Dado el vector $\vec{U} = \langle 3, 2, 4 \rangle$ y el punto $P_0(2, 3, 5)$.

   (a) Escribir la ecuación vectorial de la recta.

   Si $P(x, y, z)$ es un punto que pertenece a la recta dirigida por $\vec{U}$ y que pasa por P_0
   $\overrightarrow{P_0P}$ tiene la misma dirección que $\vec{U}$ y entonces:

   $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{U}$ donde t es un número real cualquiera

   En este caso: $\boxed{\langle x-2, y-3, z-5 \rangle = t \langle 3, 2, 4 \rangle}$ donde t es un número real.

   (b) Escribir las ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta.

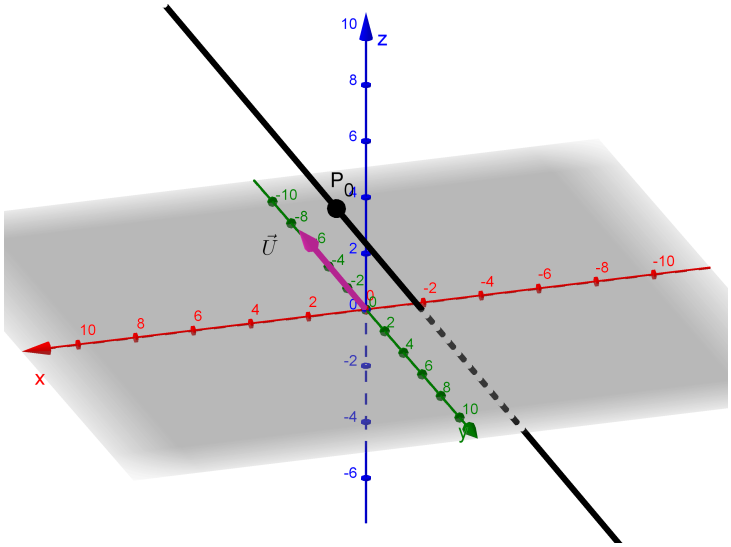
   $$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t + 3 \\ z = 4t + 5 \end{cases} \quad t \text{ es un número real.}$$

   (c) Escribir la recta en forma simétrica.

   Como las tres componentes del vector director $\vec{U}$ son distintas de cero, podemos despejar t en cada ecuación de las paramétricas:

   $$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{4}$$

(d) Graficar una parte de la recta.



2. Considerar una recta paralela al eje z que pasa por el punto $P_0(1, 4, 0)$.

   (a) Escribir su ecuación vectorial.

   Si la recta debe ser paralela al eje z **su vector director debe tener la direccion de este eje**, por ejemplo: $\vec{U} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ (o cualquier múltiplo)

   Luego la ecuación vectorial queda

   $\boxed{\langle x-1, y-4, z \rangle = t \langle 0, 0, 1 \rangle}$ donde t es un número real.

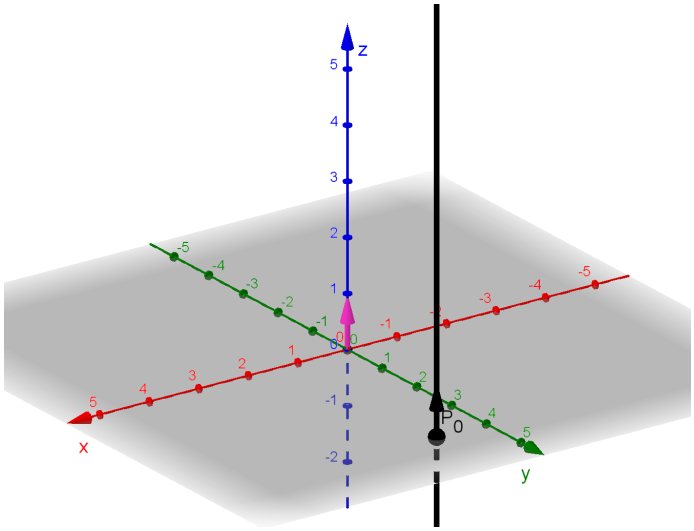
   (b) Escribir sus ecuaciones paramétricas cartesianas.

   $$\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \\ z = t \end{cases} \quad t \text{ es un número real.}$$

   (c) ¿Es posible escribir la recta en forma simétrica?

   La forma simétrica no es posible escribirla ya que hay componentes del vector director que son cero.

   (d) Graficar una parte de la recta.



3. Escribir la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1,-3,6)$ $P_2(2,4,1)$. Graficar y encontrar otros dos puntos que estén en la recta.

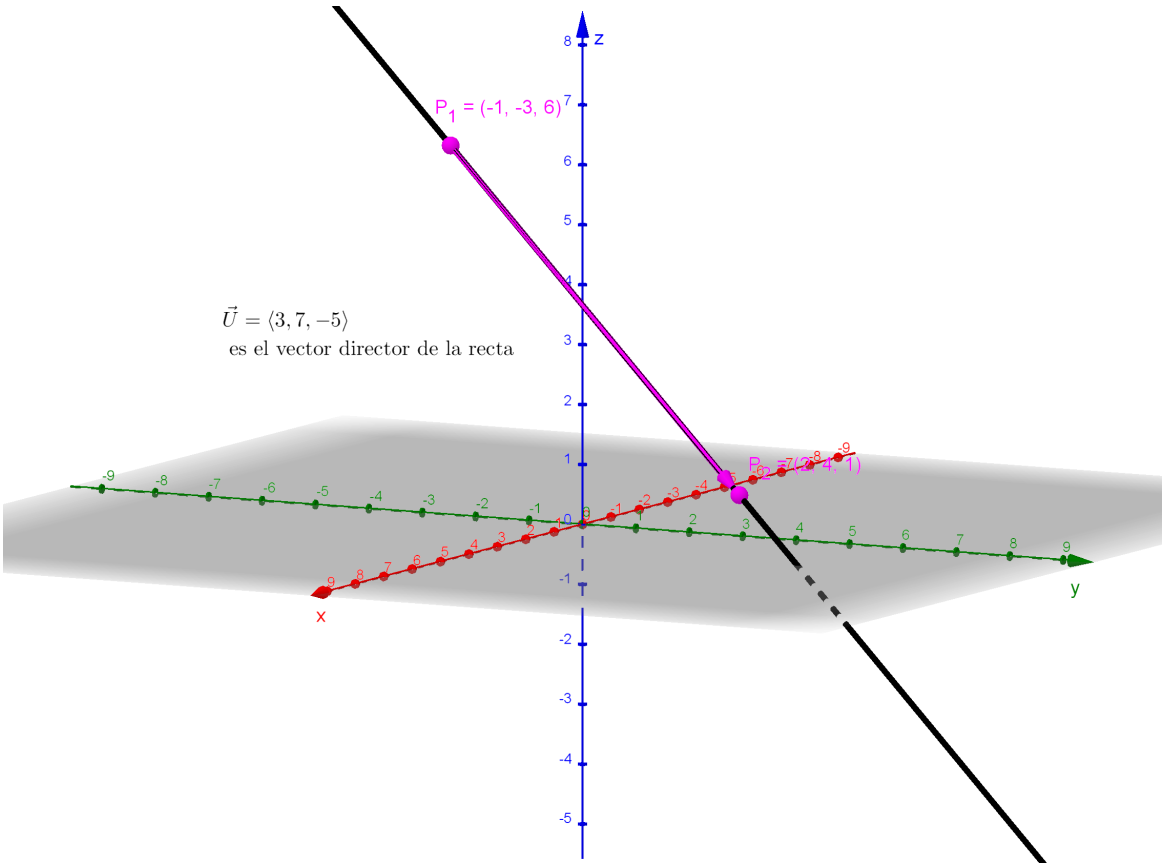
   Si los dos puntos pertenecen a la recta el vector director es :
   $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 3, 7, -5 \rangle$

   Conocemos dos puntos sobre la recta que nos permiten escribir las ecuaciones:

   Ecuación vectorial: $\boxed{\langle x-2, y-4, z-1 \rangle = t\,\langle 3, 7, -5 \rangle}$ donde t es un número real.

   Ecuaciones paramétricas cartesianas:
   $$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 7t + 4 \\ z = -5t + 1 \end{cases} \quad t \text{ es un número real.}$$

   Para encontrar otros puntos sobre la recta basta darle valores al parámetro t, por ejemplo:
   Si $t = -1$ el punto $Q_1(-1,-3,6)$ pertenece a la recta.
   Si $t = \frac{1}{2}$ el punto $Q_2(\frac{7}{2}, \frac{15}{2}, , -\frac{3}{2})$ pertenece a la recta.
   Si $t = 4$ el punto $Q_3(14, 32, -19)$ pertenece a la recta.



4. Dadas las rectas

$$\ell_1 : \begin{cases} x = & 4 - t \\ y = & 1 + 5t \\ z = & -2 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = & -4 + h \\ y = & -1 + 2h \\ z = & -2 - h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}$$

$\vec{U}_1 = \langle -1, 5, -3 \rangle$ es el vector director de ℓ_1
$\vec{U}_2 = \langle 1, 2, -1 \rangle$ es el vector director de ℓ_2.

(a) Verifiquemos que las rectas no son paralelas o coincidentes: no existe un número λ tal que $\vec{U}_1 \neq \lambda\, \vec{U}_2$, por lo tanto, las rectas se cortan en un punto o son alabeadas.

(b) Tenemos que ver si son alabeadas o se cortan, entonces planteamos

el sistema:

$$\begin{cases} 4-t &= -4+h \\ 1+5t &= -1+2h \\ -2-3t &= -2-h \end{cases} \quad \text{que es equivalente a:} \quad \begin{cases} -t-h &= -8 \\ 5t-2h &= -2 \\ -3t+h &= 0 \end{cases}$$

La matriz del sistema es: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ para averiguar el rango extraemos una submatriz de 2×2 y calculamos su determinante, por ejemplo:

$|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 7$

Por lo tanto: $\boxed{\text{el rango de } A \text{ es } 2}$

La matriz ampliada es: $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -8 \\ 5 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es de 3×3 calculamos su determinante: $|A^*| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -8 \\ 5 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Por lo tanto: $\boxed{\text{el rango de } A^* \text{ es } 2}$

El sistema tiene solución única y $\boxed{\text{las rectas se cortan en un punto.}}$

(c) Buscamos la solución del sistema:
Por sustitución, de la tercera ecuación: $h = 3t$ reemplazamos en la primera: $-t - 3t = -8$, entonces $t = 2$ y $h = 6$ es la solución del sistema.

(d) El punto de intersección se encuentra reemplazando $t = 2$ en las ecuaciones paramétricas de ℓ_1 o $h = 6$ en las ecuaciones paramétricas de ℓ_2.
De esta forma, $\boxed{\text{las rectas se cortan en el punto: } (2, 11, -8)}$