Capítulo 10

Rectas en el Espacio. Planos.

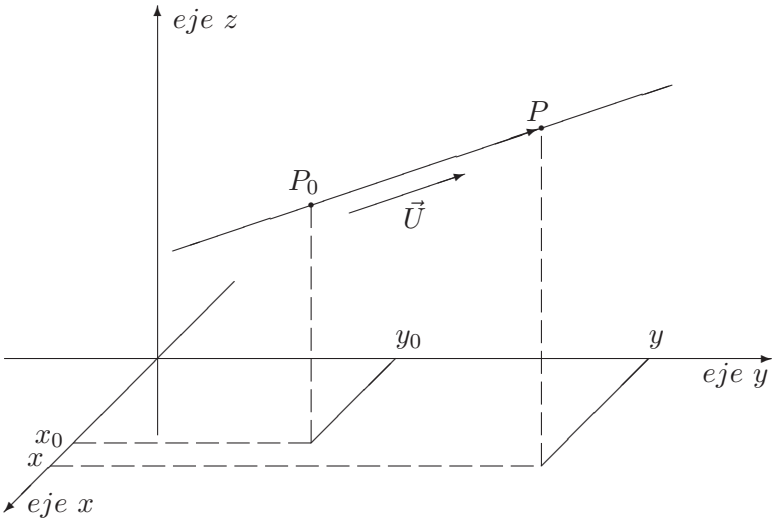
10.1. La recta

10.1.1. Ecuación vectorial de la recta

En esta sección caracterizaremos los puntos del lugar geométrico del espacio que se encuentran sobre una recta. Para esto consideremos que todos los vectores cuyos orígenes y extremos están sobre la recta son múltiplos de un vector dado al que llamaremos **vector director** de la recta.
Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto fijo de la recta y $P(x, y, z)$ es cualquier otro punto entonces:

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{U}$$

donde $\vec{U}$ es el vector director y t es un número real.



Resumiendo: Para determinar una recta hacen falta:

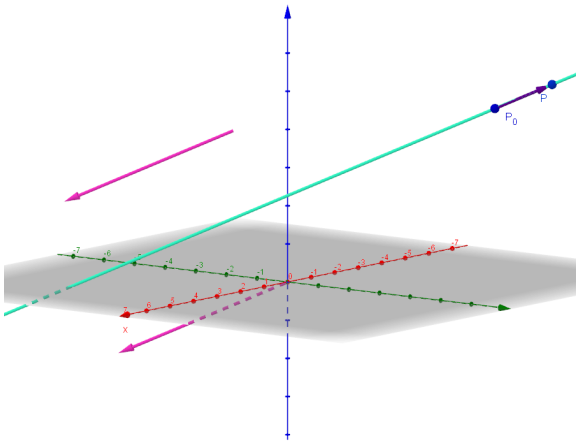
- Un vector ($\vec{U}$) que le dé la dirección.
- Un punto (P_0) que la fije en el espacio

Con mas detalle, si $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera de la recta, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es el punto dado, t es un parámetro real y $\vec{U} = \langle a, b, c\rangle$ el vector que la dirige, la **ecuación vectorial de la recta** es:

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = \langle ta, tb, tc\rangle$$

10.1.2. Ecuación paramétrica cartesiana de la recta

Igualando las componentes de los vectores, podemos escribir la ecuación anterior:



$$\begin{cases} x - x_0 = t\ a \\ y - y_0 = t\ b \\ z - z_0 = t\ c \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

O también:

$$\begin{cases} x = a\ t + x_0 \\ y = b\ t + y_0 \\ z = c\ t + z_0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

10.1.3. Forma simétrica de la recta

Despejando el parámetro t de las tres ecuaciones paramétricas e igualando se obtiene:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Observaciones: Esta forma de la recta solo puede darse si las tres componentes del vector director son diferentes de cero (recordar que no se puede dividir por cero). Hay que tener en cuenta, también, que si se necesita operar algebraicamente con la recta, debe presentársela como dos ecuaciones, que obtenidas de esta forma simétrica pueden ser:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} \\ \\ \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}$$

10.1.4. Posiciones relativas entre dos rectas

Llamaremos a las rectas con la letra ℓ y un subíndice que las identifique. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas con vectores directores $\vec{U}_1$ y $\vec{U}_2$ respectivamente. Daremos condiciones para decidir si dos rectas son perpendiculares, paralelas o ninguna de estas alternativas.

Rectas paralelas o coincidentes

Dos rectas son paralelas o coincidentes si sus vectores directores tienen la misma dirección. En otras palabras, si $\vec{U}_1$ es el vector director de ℓ_1 y $\vec{U}_2$

es el vector director de ℓ_2 entonces ℓ_1 es paralela o coincidente con ℓ_2 si:

$$\boxed{\vec{U}_1 = \lambda\, \vec{U}_2}$$

Donde λ es un número real.

Ejemplos:

1. Dadas las rectas

$$\ell_1 \ : \ \begin{cases} x = & \frac{1}{2} - 6t \\ y = & 11 + 2t \\ z = & -1 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \ell_2 : \ \begin{cases} x = & 2 + 3h \\ y = & -h \\ z = & -7 - 2h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}$$

$\vec{U}_1 = \langle -6, 2, 4 \rangle$ es el vector director de ℓ_1 $\vec{U}_2 = \langle 3, -1, -2 \rangle$ es el vector director de ℓ_2.

Como $\vec{U}_2 = -\frac{1}{2}\vec{U}_1$ los vectores directores tienen la misma dirección, es decir que las rectas son paralelas o son coincidentes.

Para verificar cual es la situación en este caso elegimos un punto de la recta ℓ_1 y vemos si pertenece o no a la recta ℓ_2.

Por ejemplo: el punto $Q(-\frac{11}{2}, 13, 3)$ pertenece a ℓ_1 debemos fijarnos si está en la recta ℓ_2, es decir, vemos si existe un valor de h que sea solución del sistema:

$$\begin{cases} -\frac{11}{2} = & 2 + 3h \\ 13 = & -h \\ 3 = & -7 - 2h \end{cases}$$

pero se ve que no tiene solución, luego las dos rectas no tienen puntos comunes. Por lo tanto las rectas son **paralelas**.

2. Dadas las rectas

$$\ell_1 : \ \begin{cases} x = & \frac{1}{2} - 6t \\ y = & 11 + 2t \\ z = & -1 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \ell_2 : \ \begin{cases} x = & -4 + 3h \\ y = & \frac{25}{2} - h \\ z = & 2 - 2h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}$$

$\vec{U}_1 = \langle -6, 2, 4 \rangle$ es el vector director de ℓ_1 $\vec{U}_2 = \langle 3, -1, -2 \rangle$ es el vector director de ℓ_2.

Como $\vec{U}_2 = -\frac{1}{2}\vec{U}_1$ los vectores directores tienen la misma dirección, es decir que las rectas son paralelas o son coincidentes.

Para verificar cual es la situación en este caso, elegimos un punto de la recta ℓ_1 y vemos si pertenece o no a la recta ℓ_2.

Por ejemplo: el punto $Q(-\frac{11}{2}, 13, 3)$ pertenece a ℓ_1 debemos fijarnos si está en la recta ℓ_2, es decir vemos si existe un valor de h que sea solución del sistema: $\begin{cases} -\frac{11}{2} = & -4 + 3h \\ 13 = & \frac{25}{2} - h \\ 3 = & 2 - 2h \end{cases}$ este valor es $h = \frac{1}{2}$, las dos rectas tienen la misma dirección y además hay un punto en común.

Por lo tanto las rectas son **coincidentes**.

Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares. Esto es, si el producto escalar de estos últimos es cero:

$$\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 = 0$$

Intersección de rectas

Sean dos rectas: ℓ_1 dirigida por $\vec{U}_1 = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y ℓ_2 dirigida por $\vec{U}_2 = \langle a_1, b_2, c_2 \rangle$ que pasa por el punto $P_2(x_2, y_2, z_2)$, si $\vec{U}_1 \neq \lambda\, \vec{U}_2$, entonces las rectas **se cortan o son alabeadas**

Si ℓ_1 tiene ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = t\ a_1 + x_1 \\ y = t\ b_1 + y_1 \\ z = t\ c_1 + z_1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

y ℓ_2 tiene ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = h\ a_2 + x_2 \\ y = h\ b_2 + y_2 \\ z = h\ c_2 + z_2 \end{cases} \qquad h \in \mathbb{R}$$

y las rectas se cortan en un punto deben existir h y t tales que:

$$\begin{cases} t\ a_1 + x_1 = h\ a_2 + x_2 \\ t\ b_1 + y_1 = h\ b_2 + y_2 \\ t\ c_1 + z_1 = h\ c_2 + z_2 \end{cases}$$

que es equivalente al sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas h y t siguiente:

$$\begin{cases} a_1\ t - a_2\ h = x_2 - x_1 \\ b_1\ t - b_2\ h = y_2 - y_1 \\ c_1\ t - c_2\ h = z_2 - z_1 \end{cases}$$

De acuerdo al teorema de Roché-Frobenius, este sistema, puede ser:

1) Compatible determinado, entonces **las rectas se cortan en un punto**. Este punto se obtiene resolviendo el sistema y reemplazando el valor de t en ℓ_1 o el valor de h en ℓ_2.

2) Incompatible, entonces **las rectas son alabeadas**. En otras palabras, sin ser paralelas, no tienen ningún punto en común.

Ejemplos:

1. Dadas las rectas

$$\ell_1 : \begin{cases} x = & 5 - 6t \\ y = & 1 + 2t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = & -1 + 4t \end{cases} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = & -4 + 3h \\ y = & -3h \qquad h \in \mathbb{R} \\ z = & 1 - 2h \end{cases}$$

$\vec{U}_1 = \langle -6, 2, 4 \rangle$ es el vector director de ℓ_1 $\vec{U}_2 = \langle 3, -3, -2 \rangle$ es el vector director de ℓ_2.

Como $\vec{U}_1 \neq \lambda\, \vec{U}_2$ las rectas se cortan en un punto o son alabeadas.

Para determinar cual es la situación planteamos el sistema:

$$\begin{cases} 5 - 6t & = -4 + 3h \\ 1 + 2t & = -3h \\ -1 + 4t & = 1 - 2h \end{cases} \quad \text{que es equivalente a:} \quad \begin{cases} -6t - 3h & = -9 \\ 2t + 3h & = -1 \\ 4t + 2h & = 2 \end{cases}$$

La matriz del sistema es: $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2.

La matriz ampliada es: $\begin{pmatrix} -6 & -3 & -9 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ que tiene rango 3.

Por lo tanto el sistema no tiene solución y las rectas son **alabeadas**.

2. Dadas las rectas

$$\ell_1 : \begin{cases} x = & -1 - 6t \\ y = & 1 + 2t \\ z = & -1 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = & -4 + 3h \\ y = & -3h \\ z = & 1 - 2h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}$$

$\vec{U}_1 = \langle -6, 2, 4 \rangle$ es el vector director de ℓ_1 $\vec{U}_2 = \langle 3, -3, -2 \rangle$ es el vector director de ℓ_2.

Como $\vec{U}_1 \neq \lambda\, \vec{U}_2$ las rectas se cortan en un punto o son alabeadas.

Para determinar cual es la situación planteamos el sistema:

$$\begin{cases} -1 - 6t & = -4 + 3h \\ 1 + 2t & = -3h \\ -1 + 4t & = 1 - 2h \end{cases} \quad \text{que es equivalente a:} \quad \begin{cases} -6t - 3h & = -3 \\ 2t + 3h & = -1 \\ 4t + 2h & = 2 \end{cases}$$

La matriz del sistema es: $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2.

La matriz ampliada es: $\begin{pmatrix} -6 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ que también tiene rango 2.

Por lo tanto el sistema tiene solución única y las rectas se cortan en un punto.

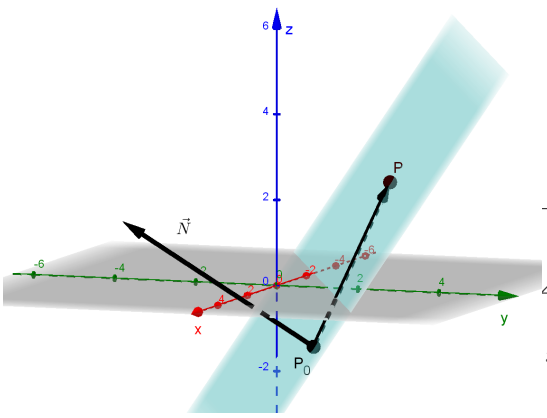
La solución del sistema es $t = 1, \quad h = -1$.

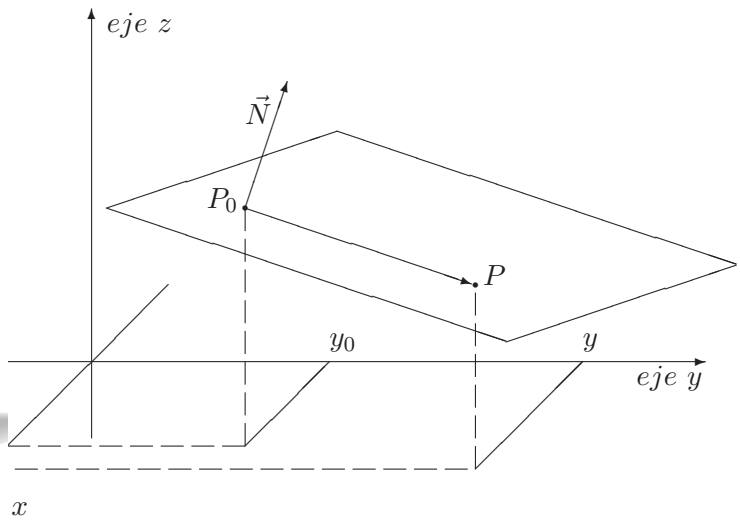
El punto de intersección es $(-7, 3, 3)$.

10.2. El plano

Caracterizaremos los puntos del lugar geométrico del espacio que se encuentran sobre un plano. Al igual que con la recta, un plano queda perfectamente determinado si tenemos un vector $(\vec{N})$ que le dé la dirección y un punto (P_0) que lo fije en el espacio.

La situación se presenta en el siguiente gráfico. Notar que el vector no pertenece al plano sino que es perpendicular al mismo (si quisiéramos dirigir el plano con vectores pertenecientes al mismo serían necesarios al menos dos que no fueran colineales, esta situación se contemplará mas adelante).





10.2.1. Ecuación vectorial del plano

En el gráfico anterior:

- $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto dado del plano y $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera del mismo.
- $\vec{N} = \langle A, B, C \rangle$ el vector normal (perpendicular) que lo dirige.
- $\overrightarrow{P_0P} = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle$ es el vector que pertenece al plano que se construye con los dos puntos.

Está claro que los dos vectores $\overrightarrow{P_0P}$ y $\vec{N}$ son perpendiculares, recordando el producto escalar entre vectores, la **ecuación vectorial del plano** será:

$$\boxed{\vec{N} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0}$$

10.2.2. Ecuación cartesiana del plano

Desarrollando el producto escalar, que define al plano, obtenemos:

$$\langle A, B, C \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

Finalmente la ecuación cartesiana del plano es:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

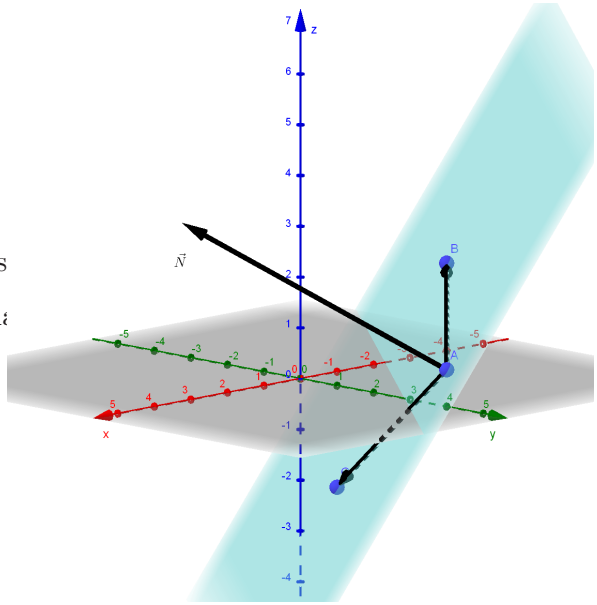
Otra forma habitual de presentar esta ecuación es la que se obtiene distribuyendo y agrupando:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

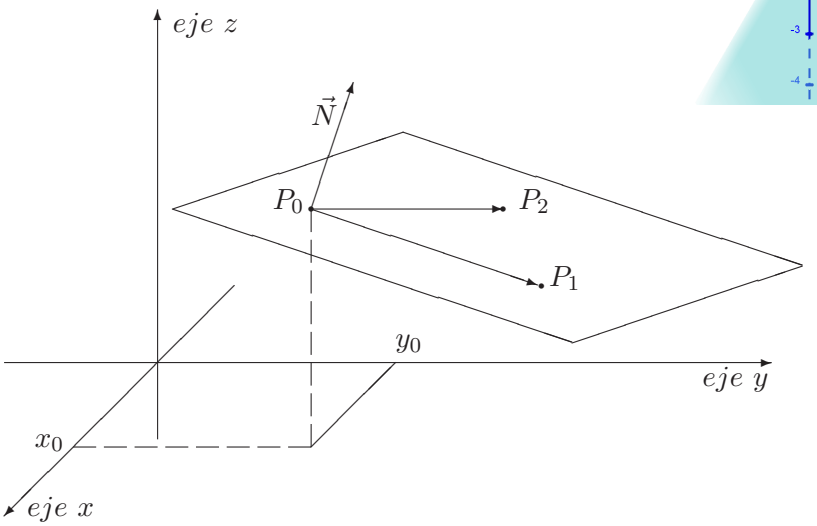
Donde $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$

10.2.3. Plano determinado por tres puntos no alineados

Dados tres puntos no alineados en el espacio, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ encontraremos la ecuación del plano que ellos determinan. Como dijimos, esto será posible si tenemos el vector $\vec{N} = \langle A, B, C \rangle$ y un punto.



El punto puede ser cualquiera de los tres dados
nos queda la tarea de encontrar el vector norma
hay que construir los vectores $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}$. La
siguiente gráfico:



Utilizando el producto vectorial, el vector $\vec{N}$ será:

N es perpendicular a los dos vectores

$$\boxed{\overrightarrow{N} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}}$$

Finalmente con el punto P_0 y el vector $\vec{N}$ podemos construir el plano como en la sección anterior, esto es, dar su ecuación cartesiana.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación cartesiana del plano que queda determinado por los tres puntos $\boxed{P_0(0,4,-1),\ \ P_1(1,-1,2),\ \ P_2(2,-3,5).}$ Los vectores que pertenecen al plano son:

$$\boxed{\overrightarrow{P_0P_1} = \langle 1,-5,3\rangle\,, \qquad \overrightarrow{P_0P_2} = \langle 2,-7,6\rangle\,.}$$

Notar que no existe un número λ de modo que se cumpla $\overrightarrow{P_0P_1} = \lambda\overrightarrow{P_0P_2}$, es decir, que los vectores no son colineales.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

Entonces $\boxed{\overrightarrow{N} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} = \langle -9, 0, 3 \rangle}$

La ecuación cartesiana del plano será: $\boxed{-9(x-0)+0(x-4)+3(z+1) = 0}$

10.2.4. Programación lineal

NO SE DA ESTE TEMA

Estudiaremos a continuación un modelo matemático que tiene las siguientes características: se quiere determinar el valor óptimo (máximo o mínimo) de un parámetro al que llamaremos z y que depende de dos variables x e y.

Esta dependencia es de la forma $z = ax + by + c$ (corresponde a la ecuación de un plano) donde $a,\ b,\ c$, son constantes. Las variables x e y están relacionadas mediante desigualdades lineales que forman un polígono cerrado.

Teorema: Dada la ecuación $z = ax + by + c$, y un conjunto de puntos $P(x, y)$ para los cuales tiene sentido la ecuación. Este conjunto queda definido mediante un sistema de desigualdades lineales. Si la gráfica de este sistema consiste en un polígono y su interior, entonces z tiene un valor máximo y un valor mínimo en alguno de los vértices del polígono.

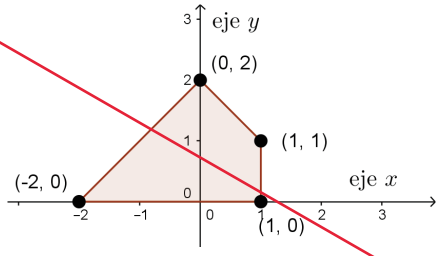
Para abordar estos problemas:

- Identificar cual es la función z (esta se percibe en la pregunta).
- Identificar cuales son las variables x e y.
- Escribir las restricciones a que están sujetas x e y (desigualdades en el plano).
- Representar gráficamente el polígono.
- Evaluar z en los vértices del polígono.

Ejemplo:

La temperatura en grados centígrados de cada punto $P(x, y)$ de una placa está dada por $z = -x + \frac{1}{2}y + 3$

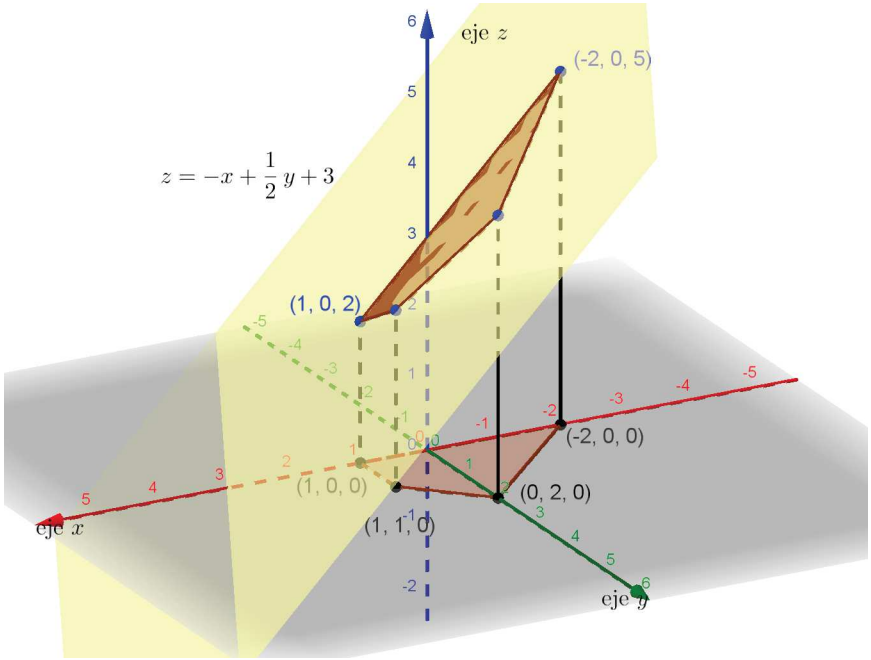
La placa consiste en un cuadrilátero contenido en el plan xy cuyos vértices son $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, y $(-2,0)$,



Se necesitan determinar los puntos de la placa con menor y mayor temperatura.

- Las variables x e y son las coordenadas de cada punto de la placa.
- La función que da la temperatura en cada punto (x, y) es

$$z = -x + \frac{1}{2}y + 3$$



- La temperatura en $(1,0)$ es $z_1 = -1 + 3 = 2$,
  en $(1,1)$ es $z_2 = -1 + \frac{1}{2}1 + 3 = \frac{5}{2}$,

en $(0,2)$ es $z_3 = \frac{1}{2}2 + 3 = 4$

en $(-2,0)$ es $z_4 = 2 + 3 = 5$.

La temperatura **máxima** es 5 en el vértice $(-2,0)$, la temperatura **mínima** es 2 en el vértice $(1,0)$.

10.2.5. Posiciones relativas entre dos planos

Plano 1

Consideremos dos planos, uno que está dirigido por el vector $\vec{N}_1 = \langle A_1, B_1, C_1 \rangle$ y pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ el otro dirigido por $\vec{N}_2 = \langle A_2, B_2, C_2 \rangle$ y pasa por $P_2(x_2, y_2, z_2)$.
Tendremos las siguientes alternativas.

Plano 2

Planos paralelos o coincidentes

Dos planos son paralelos o coincidentes si sus vectores directores tienen la misma dirección. En otras palabras, si $\vec{N}_1$ es el vector director de uno de los planos y $\vec{N}_2$ es el vector director del otro plano:

$$\boxed{\overrightarrow{N}_1 = \lambda \overrightarrow{N}_2}$$

Como encontrar un punto que pertenece al plano?
Sus coordenadas son tres números que verifican la ecuación, por ejemplo, para cualquier valor de ***y z***
x=3y-6z+2
Ejemplos:
(2, 0, 0) (5, 3, 1) (-16, -1, 2).....

Ejemplos:

1. Dados los planos:

   $\Pi_1 : \; x - 3y + 6z - 2 = 0 \qquad \Pi_2 :$

   $\vec{N}_1 = \langle 1, -3, 6 \rangle$ es el vector director de Π_1 $\quad \vec{N}_2 = \left\langle -\frac{1}{3}, 1, -2 \right\rangle$ es el vector director de Π_2. Como $\vec{N}_2 = -\frac{1}{3}\vec{N}_1$ los vectores directores tienen la misma dirección, es decir que los planos son paralelos o son coincidentes.

   Para verificar cual es la situación en este caso, elegimos un punto del plano Π_1 y vemos si pertenece o no al plano Π_2.

   El punto $Q(2,0,0)$ pertenece a Π_1 debemos fijarnos si está en el plano

Π_2, es decir vemos si las coordenadas de Q son solución de la ecuación de Π_2:

$$\boxed{-\frac{1}{3}2 + 0 - 2 \cdot 0 + 1 = \frac{2}{3} \neq 0}$$

puesto que las coordenadas de Q no son solución de la ecuación, significa que los dos planos no tienen puntos comunes.

En este caso los planos son **paralelos**.

2. Dados los planos:

$$\Pi_1 : \ x - 3y + 6z - 2 = 0 \qquad \Pi_2 : \ -\frac{1}{3}x + y - 2z = -\frac{2}{3}$$

$\vec{N}_1 = \langle 1, -3, 6 \rangle$ es el vector director de Π_1 $\quad \vec{N}_2 = \left\langle -\frac{1}{3}, 1, -2 \right\rangle$ es el vector director de Π_2. Como $\vec{N}_2 = -\frac{1}{3}\vec{N}_1$ los vectores directores tienen la misma dirección, es decir que los planos son paralelos o son coincidentes.

Para verificar cual es la situación en este caso, elegimos un punto del plano Π_1 y vemos si pertenece o no al plano Π_2.

El punto $Q(2, 0, 0)$ pertenece a Π_1 debemos fijarnos si está en el plano Π_2, es decir vemos si las coordenadas de Q son solución de la ecuación de Π_2:

$$\boxed{-\frac{1}{3}2 + 0 - 2 \cdot 0 = -\frac{2}{3}}$$

puesto que las coordenadas de Q son solución de la ecuación, significa que los dos planos tienen todos sus puntos comunes.

En este caso los planos son **coincidentes**.

Planos perpendiculares

Los dos planos serán perpendiculares si sus vectores directores lo son:

$$\boxed{\overrightarrow{N}_1 \cdot \overrightarrow{N}_2 = 0}$$

Intersección de dos planos

Si los planos no son paralelos se cortarán en una recta.
Una forma simple de encontrar esta recta es reemplazar cualquiera de las tres variables, x, y, z, por el parámetro t en las ecuaciones de ambos planos, luego resolver el sistema de dos ecuaciones en función de t, obteniéndose las ecuaciones paramétricas de la recta. A modo de ejemplo:

$$\begin{cases} A_1(t-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0 \\ A_2(t-x_2)+B_2(y-y_2)+C_2(z-z_2)=0 \end{cases}$$

Encontrando los valores de y y z en términos de t obtenemos las ecuaciones paramétricas buscadas.

Ejemplo:

Dados los planos: $\Pi_1: \ x-3y+6z-2=0$ $\Pi_2: \ -x-3y+z-1=0$
$\vec{N}_1 = \langle 1,-3,6\rangle$ es el vector director de Π_1 $\vec{N}_2 = \langle -1,-3,1\rangle$ es el vector director de Π_2. Como $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$ no tienen la misma dirección (uno no es múltiplo del otro), los planos no son paralelos ni son coincidentes.
Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x=t \\ x-3y+6z-2=0 \\ -x-3y+z-1=0 \end{cases}$$

que puede considerarse como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y z:

$$\begin{cases} -3y+6z=2-t \\ -3y+z=1+t \end{cases}$$

resolviendo y recordando que $x = t$ queda:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{7}{15}t - \frac{4}{15} \\ z = -\frac{2}{5}t + \frac{1}{5} \end{cases}$$

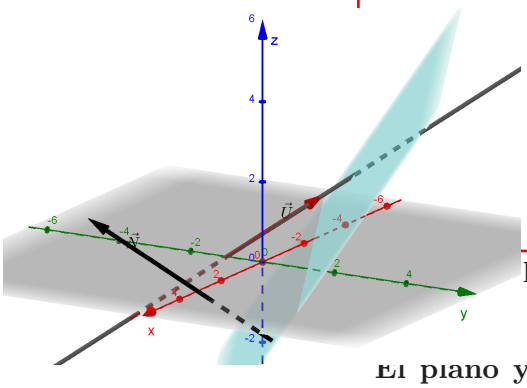
que son las ecuaciones paramétricas de la recta que surge como intersección de los dos planos.

10.2.6. Posiciones relativas entre una recta y un plano

Dada la recta:

$$\begin{cases} x = a\ t + x_1 \\ y = b\ t + y_1 \\ z = c\ t + z_1 \end{cases}$$

$$A(x - x_2) + B(y - y_2) + C(z - z_2) = 0$$



las siguientes alternativas.

El plano y la recta son paralelos o la recta esta contenida en el plano

Si los vectores directores son perpendiculares entonces el plano y la recta son paralelos o la recta está contenida en el plano, esto es:

$$\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{U} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A\ a + B\ b + C\ c = 0$$

Ejemplos

1) Dados el plano: $\Pi:\ x - 3y + z - 2 = 0$ y la recta $\ell: \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = t - 3 \end{cases}$

$\vec{N} = \langle 1, -3, 1 \rangle$ es el vector director de Π $\quad \vec{U} = \langle 2, 1, 1 \rangle$ es el vector director

de ℓ.

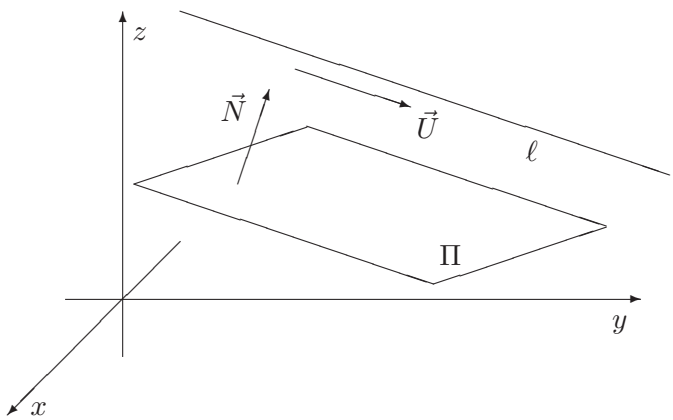
Como $\vec{N} \cdot \vec{U} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$ los vectores directores son perpendiculares y la recta y el plano son paralelos (si no tienen ningún punto común) o la recta está contenida en el plano.

Para ver cual es el caso tomamos un punto de la recta y nos fijamos si pertenece o no al plano.

$P_0(2, 1, -3)$ está en la recta ℓ para ver si está en el plano :

$2 - 3 \cdot 1 + (-3) - 2 = -6 \neq 0$

el punto P_0 no pertenece al plano y entonces la recta y el plano son paralelos.



2) Dados el plano: $\Pi : \; x - 3y + z - 2 = 0$ y la recta $\ell : \begin{cases} x = 2t + 6 \\ y = t + 1 \\ z = t - 3 \end{cases}$

$\vec{N} = \langle 1, -3, 1 \rangle$ es el vector director de Π ; $\vec{U} = \langle 2, 1, 1 \rangle$ es el vector director de ℓ.

Como $\vec{N} \cdot \vec{U} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$ los vectores directores son perpendiculares y la recta y el plano son paralelos (si no tienen ningún punto común) o la recta está contenida en el plano.

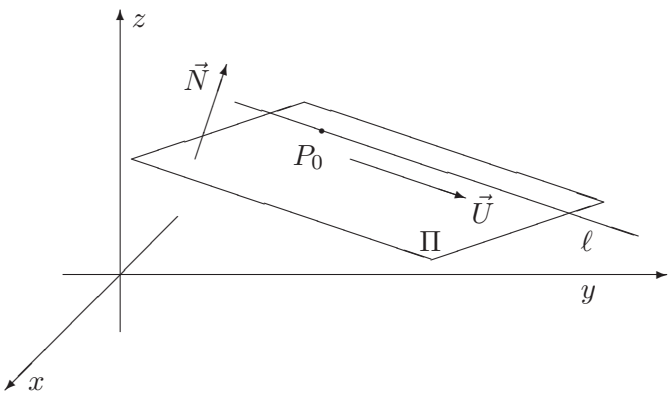
Para ver cual es el caso tomamos un punto de la recta y nos fijamos si

pertenece o no al plano.

$P_0(6,1,-3)$ está en la recta ℓ para ver si está en el plano :

$6 - 3 \cdot 1 + (-3) - 2 = 0$

Luego, el punto P_0 pertenece al plano y entonces la recta está contenida en el plano.



El plano y la recta son perpendiculares

Si los vectores directores son paralelos el plano y la recta son perpendiculares, esto es:

$$\overrightarrow{N} = \lambda \overrightarrow{U}$$

Intersección entre el plano y la recta

Si la recta y el plano no son paralelos entonces se cortan en un punto.

Este punto se determina resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} A(x - x_2) + B(y - y_2) + C(z - z_2) = 0 \\ x = a\ t + x_1 \\ y = b\ t + y_1 \\ z = c\ t + z_1 \end{cases}$$

ecuación cartesiana del plano

ecuaciones paramétricas de la recta

Ejemplo: Encontrar, si existe, el punto de intersección entre el plano de ecuación $-2x + 3y + z = 5$ con la recta que pasa por $P_0(1,1,8)$ y dirigida

por $\vec{U} = \langle -3, 4, 0\rangle$. El vector normal al plano es $\vec{N} = \langle -2, 3, 1\rangle$ como $\vec{N} \cdot \vec{U} = (-2)(-3) + 4\,3 + 0\,1 = 18 \neq 0$ el plano y la recta no son paralelos, luego existe un punto de intersección entre ellos y se det[illegible]do:

$$\begin{cases} -2x + 3y + z = 5 \\ x = -3\ t + 1 \\ y = 4\ t + 1 \\ z = 8 \end{cases}$$

ecuación cartesiana del plano

ecuaciones paramétricas de la recta

Reemplazando en la primera ecuación: $-2(-3\ t+1) + 3(4\ t+1) + 8 = 5$

Luego la solución del sistema es $t = -\frac{2}{9}$ $\quad x = \frac{15}{9}$ $\quad y = \frac{1}{9}$ $\quad z = 8$. El punto de intersección es $Q(\frac{15}{9}, \frac{1}{9}, 8)$

10.3. Ejercicios

1. $\bigoplus \bigotimes \bigodot \odot \otimes \oplus$ Dado el vector $\vec{U} = \langle 3, 2, 4\rangle$ y el punto $P_0(2, 3, 5)$.

   a) Escribir la ecuación vectorial de la recta.

   b) Escribir las ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta.

   c) Escribir la recta en forma simétrica.

   d) Graficar una parte de la recta.

2. Considerar una recta paralela al eje z que pasa por el punto $P_0(1, 4, 0)$.

   a) Escribir su ecuación vectorial.

   b) Escribir sus ecuaciones paramétricas cartesianas.

   c) ¿Es posible escribir la recta en forma simétrica?

   d) Graficar una parte de la recta.

ecuación cartesiana del plano

ecuaciones paramétricas de la recta

3. Escribir la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1, -3, 6)$ $\ P_2(2, 4, 1)$. Graficar y encontrar otros dos puntos que estén en la recta.

4. Dadas las rectas:

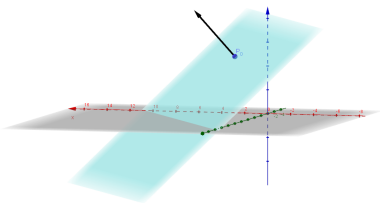
$$\ell_1\colon \begin{cases} x = 3\,t + 1 \\ y = -2\,t \\ z = \ t - 2 \end{cases} \qquad \ell_2\colon \begin{cases} x = \ t + 2 \\ y = \ t \\ z = -\,t - 2 \end{cases}$$

$\ell_3\colon \dfrac{x-4}{-6} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z}{-2}$ $\qquad$ ℓ_4: pasa por $P_1(-3,1,7)$ $\;P_2(-2,-1,4)$

ℓ_5: pasa por $P_1(3,1,-3)$ $\;P_2(0,-2,0)$

Tomándolas de a pares decidir si: son paralelas, coincidentes, perpendiculares, ninguna de las anteriores, se cortan en un punto o son alabeadas.

5. Dado el vector $\vec{U} = \langle 3,2,4\rangle$ y el punto $P_0(2,3,5)$



   a) Escribir la ecuación vectorial del plano.

   b) Escribir la ecuación cartesiana del plano.

   c) Graficar una parte de plano.

   d) Hallar tres puntos del plano.

6. Una persona planea invertir hasta \$22000 en los bancos X o Y, o en ambos. Invertiría al menos \$2000, pero no más de \$14000 en el banco X. No invertirá más de \$15000 en el banco Y. El banco X paga un 6 % de interés simple, y el banco Y un 6.5 %. ¿Cuánto debería invertir en cada banco para maximizar el rendimiento? ¿Cuál es el beneficio máximo que se puede obtener?

7. Se debe rendir un examen que contiene preguntas del tipo A que valen 10 puntos y del tipo B que valen 25 puntos. Se deben responder al menos 3 del tipo A, pero las restricciones de tiempo impiden responder más de 12. Se deben contestar al menos 4 preguntas del tipo B, pero las restricciones de tiempo impiden responder más de 15. En total, no

se pueden contestar más de 20 preguntas. Suponiendo que todas las respuestas sean correctas, ¿cuántas preguntas de cada tipo se deben responder para maximizar la calificación? ¿Cuál es esta calificación máxima?

8. Una sastrería tarda 2 horas en cortar y 4 horas en coser un traje de hilo. Para hacer un traje de lana peinada tarda 4 horas en el corte y 2 horas en el cosido. En un día de trabajo, dispone a lo sumo de 20 horas para el corte y 16 para el cosido. Las ganancias en un traje de hilo son de \$34 y en un traje de lana peinada \$31. ¿Cuántos trajes de cada tipo debería producir la sastrería para optimizar su ganancia diaria? ¿Cuál es esta ganancia diaria?

9. Dados los planos (a los que llamaremos con la letra π con subíndice):
   $\pi_1 : -(x-1)+2(y+1)-(z-2)=0$
   $\pi_2 : 2x+y-8=0$
   π_3 : pasa por $P_1(1,-1,8)$; $P_2(4,2,11)$; $P_3(0,-3,5)$
   $\pi_4 : -x+2y-z=-5$
   Tomándolos de a pares decidir si: son paralelos, coincidentes, perpendiculares, ninguna de las anteriores. Si no son paralelos encontrar la recta que surge de la intersección de ambos.

10. Dados el plano $\pi_1 : -2x+2y-3z-7=0$ y ℓ_1 la recta que pasa por los puntos $P_1(4,5,2)$ y $P_2(3,6,1/2)$ decidir si: son paralelos, coincidentes, perpendiculares, ninguna de las dos anteriores. Si no son paralelos encontrar el punto de intersección de ambos.

10) Vector normal al plano <-2,2,-3>

Vector director de la recta P_1P_2

11. Idem anterior para $\pi_2 : x-3y+4z-2=0$ y ℓ_2: : $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{3}$

12. Idem anterior para π_3: $x-3y+7z-2=0$ y ℓ_3: la recta dirigida por $\vec{U}=\langle 2,3,1\rangle$ y que pasa por el punto $P_0(2,0,0)$

13) El vector normal al plano es perpendicular con los vectores A y B

Entonces N=AxB

El plano pasa por (0,0,0)

Con estos datos se construye la ecuación cartesiana del plano.

13. Encontrar la ecuación cartesiana del plano que contiene los vectores $\vec{A} = \langle -6, 2, 5 \rangle$, $\vec{B} = \langle 3, -3, 1 \rangle$ y que pasa por el origen. ¿Pertenece el punto $(4, 2, 7)$ al plano?

14. Encontrar la ecuación del plano Π paralelo al plano $-x + 2y = 11$ que pasa por el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 3)$. Encontrar otro punto del plano.

15. El ángulo entre dos planos es el ángulo entre los vectores directores correspondientes a cada uno de los planos. Encontrar el ángulo entre los planos cuyas ecuaciones cartesianas son: $2x - 3y + z = 4 \quad -5x + 2y - 5z = -2$

16) Perpendicular al eje z, entonces: N=<0,0,1>

16. Hallar la ecuacion de un plano perpendicular al eje z que pase por el punto $P(3, 0, 0)$. Graficar y hallar dos puntos que pertenezcan al plano.