Formular un problema de Programación Lineal: el método de la traducción

Pablo Yapura
Introducción a la Investigación de Operaciones
Junio del 2018

Introducción

Los problemas y los estudios de casos juegan un papel central en el aprendizaje de la Investigación de Operaciones. Estos problemas o casos intentan enfatizar algún contenido considerado esencial y en sus enunciados se pueden observar, por sobre toda otra consideración, los aspectos didácticos. No obstante, también es común a todos ellos la pretensión, no siempre lograda, de reflejar situaciones realistas. Esta pretensión está plenamente justificada no sólo por las razones didácticas apuntadas sino también porque, en situaciones efectivamente reales, los problemas se presentan todo el tiempo y reclaman soluciones, a menudo óptimas. Cabe consignar que la diferencia más importante entre un enunciado de problema típico de un libro de texto y uno característico del mundo real es que este último es, a menudo, formulado de una manera mucho más imprecisa que el primero. Esto se acentuará si quien especifica el problema no está familiarizado con la optimización y la forma de razonar que ello implica.

Pero más allá de lo señalado, tanto en el mundo real como en los libros de texto todos los problemas se explicitan por primera vez usando el lenguaje natural, es decir aquel que se usa cotidianamente para todo tipo de comunicaciones entre seres humanos, ya sea en forma escrita u oral. Por otra parte, para que un problema de optimización se pueda solucionar en la computadora es necesario que el mismo se exprese en alguno de los lenguajes que la propia computadora pueda entender. Estos lenguajes computacionales poco tienen que ver con una lengua natural y es la matemática, que ha desarrollado su propio lenguaje, la que actúa como el necesario eslabón para que un problema expresado en castellano, por ejemplo, se pueda resolver en una computadora.

En primer lugar es necesario, entonces, que un problema expresado en el lenguaje natural y en cualquiera de sus formas, escritas u orales, sea formulado como un modelo matemático que lo represente fielmente. Una vez expresado matemáticamente y habiendo removido todo tipo de ambigüedad que pueda persistir, la tarea de transcribirlo a una forma que el microprocesador de una computadora pueda resolver, en general puede ser automatizada y como tal ser debe ser confiada a la propia computadora.

Por las razones apuntadas, resultará fácil y natural entender que la tarea de formular modelos matemáticos que representen problemas de decisión se puede equiparar a la labor de traducción. Sin pretensión de profundidad alguna, la traducción de un texto entre dos lenguas se puede considerar exitosa si ambos expresan el mismo significado, independientemente de la literalidad entre ambos textos, esto es, la equivalencia palabra por palabra. Con estas ideas como motivación, Palocsay y Stevens (2007) han desarrollado un método para obtener un modelo matemático de un problema de Programación Lineal a partir de un enunciado hecho en lenguaje natural, el que se presentará brevemente a continuación. Como se verá también, una vez formulado matemáticamente, el problema se podrá transcribir a una planilla de cálculo de forma muy sencilla para obtener la solución buscada, de manera igualmente simple.

La etapa semántica

Para traducir un problema que se enuncia en prosa, normalmente en forma escrita, en un modelo matemático que lo represente fielmente, se propone hacerlo en dos etapas. En la primera etapa se enfatizará en los aspectos semánticos del enunciado. Para ello y aunque parezca que se altera un orden natural en su presentación, lo más conveniente es asumir que todo problema de Programación Lineal tiene tres componentes principales que se deben analizar en el orden propuesto:

1. ¿Cuál es el objetivo que se debe maximizar o minimizar?
2. ¿Cuáles son las limitaciones o requerimientos que condicionan o restringen la solución buscada?
3. ¿Qué es lo que se está tratando de decidir?

En esta etapa, a la que los autores han calificado de semántica, lo que se propone es que las respuestas a estas tres preguntas adopten la forma de una *cantidad mensurable*, la cual, además, debe prescindir de valores numéricos para enfatizar en los significados.

Luego, para la segunda etapa de la traducción lo que se sugiere es adoptar un procedimiento simple que transforme cada cantidad mensurable en una expresión algebraica apropiada. Estas expresiones algebraicas, a su vez, resultarán sencillas de transcribir a un modelo expresado en el lenguaje de las planillas de cálculo que facilitará su solución.

Primer ejemplo

Una librería ha recibido de su distribuidor 40 ejemplares de una nueva novela encuadernados a la rústica (vulgarmente conocido como *tapas blandas*) y 65 ejemplares de la misma novela pero encuadernados en cartoné (*tapas duras*). Sin embargo, por las reservas que ha tomado hasta el propio sábado, necesitará 80 ejemplares de cada tipo al abrir luego del fin de semana. Para ese día la librería debe tener estos 160 libros, pero las expectativas de venta recomiendan tener tantos ejemplares como sea posible disponibles para la venta. Dada la urgencia, el distribuidor puede despachar inmediatamente hasta 10 cajas de libros en total. Las *cajas de libros a la rústica* contienen 6 libros cada una. El distribuidor sólo tiene almacenadas 7 *cajas de libros en cartoné*, pero cada una de estas cajas sólo contienen 5 ejemplares encuadernados en cartoné y se completan con 2 ejemplares encuadernados a la rústica. ¿Cómo debería ser el envío del distribuidor para una mejor satisfacción de las necesidades de la librería?

Primera etapa: cantidades mensurables

Aunque en un problema real suele constituir un desafío importante, en este enunciado, como en la mayoría de los problemas publicados en libros de texto, el objetivo es relativamente sencillo de identificar: es una cantidad que se debe hacer tan grande, o tan pequeña, como sea posible. En el ejemplo, lo que se debe maximizar es el número total de libros disponibles para la venta, sean estos encuadernados a la rústica o en cartoné ("tener tantos ejemplares como sea posible").

Si se analiza el enunciado para encontrar las restricciones, se pueden buscar algunas expresiones en castellano que las denotan. Ejemplos típicos son, entre otros, "como mucho", "como mínimo", "no más que", "no menos que", "hasta", "exactamente", "se requieren", "están limitadas a", "están restringidas a", "están acotadas a", "hay disponibles", "se necesitan", "se demandan", "deben", "no pueden", "no deben". En el ejemplo de la librería se pueden identificar dos limitaciones ("hasta 10 cajas de libros" y "tiene almacenadas 7 cajas de libros en cartoné") y dos requerimientos ("necesitará 80 ejemplares de cada tipo").

Concluida este análisis, y prescindiendo por completo de los valores numéricos, se puede escribir una versión del problema que enfatiza las cantidades mensurables del problema. Tampoco es necesario identificar las variables de decisión, aún. Por el contrario, resultarán evidentes las semejanzas entre algunas restricciones y quedará claro que a ambos lados de las restricciones deben obtenerse unidades físicas idénticas. Por ejemplo:

Maximizar	*N.° total de libros en el depósito de la librería*
Sujeto a:	*N.° de cajas en cartoné despachadas ≤ N.° de cajas en cartoné disponibles*
	N.° total de cajas despachadas ≤ N.° de cajas que se pueden despachar
	N.° de libros en cartoné disponibles ≥ N.° de libros en cartoné requeridos
	N.° de libros a la rústica disponibles ≥ N.° de libros a la rústica requeridos

Ahora es oportuno preocuparse por la definición de las *variables de decisión*. Dado que las variables de decisión son la expresión matemática de las actividades que se pueden implementar para cumplir el objetivo, es conveniente recordar que su cantidad, o mejor dicho, su nivel, debe estar bajo control directo del responsable de la decisión. En caso de duda, la recomendación es tratar de analizarlas a la luz de las cantidades mensurables ya identificadas y como las actividades las influyen o causan o afectan. Para el ejemplo son candidatas las cantidades de cada tipo de libro a despachar desde el depósito a la librería, porque así aparecen en la cantidad mensurable del objetivo y en las respectivas cantidades mensurables de un par de restricciones. Pero también son candidatas las cantidades de cada tipo de caja a despachar desde el depósito a la librería, porque así aparecen en las cantidades mensurables del otro par de restricciones. Dado que el depósito despacha cajas y no libros *sueltos*, lo mejor en este caso es elegir el número de cajas de cada tipo para conformar las variables de decisión. Por ejemplo:

C : N.° cajas de libros en cartoné a despachar
R : N.° cajas de libros a la rústica a despachar

Como último control se debe verificar que sea posible convertir las variables de decisión definidas en todas las cantidades mensurables (objetivo y restricciones). En el ejemplo es fácil ver que el número de cajas aparece directamente en dos restricciones. También es fácil ver que en el enunciado están los datos necesarios para determinar la cantidad total de cada tipo de libro sabiendo la cantidad de cajas de cada tipo, de modo que todo lo necesario ha sido incluido.

Segunda etapa: expresiones matemáticas

Para expresar matemáticamente una cantidad mensurable, es decir para traducirla en una expresión lineal apropiada, o bien en una fórmula de hoja de cálculo, el método de la traducción sugiere adoptar la *Regla del Coeficiente*. Se aplicación es sencilla y requiere recuperar la noción de variable de decisión ya adoptada. Se toma cada cantidad mensurable y se inquiere qué pasa si la variable de decisión aumenta o disminuye en 1. Por ejemplo, el objetivo es el número total de libros y una de las variables de decisión era R, la cantidad de cajas de libros a la rústica a fletar. Si R aumenta 1 porque el distribuidor fleta una caja de libros a la rústica ($R = R + 1$, o R += 1, como se escribe en varios lenguajes de programación), entonces la cantidad mensurable del objetivo aumenta en 6 puesto que este es el número de libros encuadernados a la rústica en cada caja de ese tipo. Análogamente, si C aumenta 1 porque se fletó una caja de libros en cartoné, entonces la cantidad mensurable aumenta en $5 + 2 = 7$. Usando la metáfora de completar los espacios en blanco de un formulario, se podría pensar en una expresión algebraica para la cantidad mensurable del objetivo, esto es para la cantidad total de libros disponibles para la venta en la librería: $\_\_R + \_\_C$. Habiendo aplicado la *Regla del Coeficiente* como se describió, entonces la fórmula quedaría: $6R + 7C$. Para completar, si asumimos por un instante que R y C toman valores nulos simultáneamente, es decir como si no hubiera despacho alguno del distribuidor a la librería, la cantidad mensurable del objetivo debería reflejar de manera realista que la librería ya tenía en su depósito, antes de recibir nuevas cajas, $65 + 40 = 105$ libros. Así, la formulación con espacios en blanco de un formulario debió incluir un *término constante*: $\_\_R + \_\_C + \_\_\_$. Finalmente, el objetivo queda formulado algebraicamente con $6R + 7C + 105$.

Para completar el problema de Programación Lineal se procede con idénticas formas y razonamientos sobre cada una de las cantidades mensurables ya identificadas, recordando agregar las correspondientes expresiones de no-negatividad:

Maximizar

$$\overbrace{\mathbf{6\,R + 7\,C + 105}}^{\textit{N.° total de libros en el depósito de la librería}}$$

Sujeto a:

$$\overbrace{\mathbf{1\,C}}^{\textit{N.° de cajas en cartoné despachadas}} \leq \overbrace{\mathbf{7}}^{\textit{N.° de cajas en cartoné disponibles}}$$

$$\overbrace{\mathbf{1\,R + 1\,C}}^{\textit{N.° total de cajas despachadas}} \leq \overbrace{\mathbf{10}}^{\textit{N.° de cajas que se pueden despachar}}$$

$$\overbrace{\mathbf{5\,C + 65}}^{\textit{N.° de libros en cartoné disponibles}} \geq \overbrace{\mathbf{80}}^{\textit{N.° de libros en cartoné requeridos}}$$

$$\overbrace{\mathbf{6\,R + 2\,C + 40}}^{\textit{N.° de libros a la rústica disponibles}} \geq \overbrace{\mathbf{80}}^{\textit{N.° de libros a la rústica requeridos}}$$

$$\overbrace{\mathbf{R \geq 0;\ C \geq 0}}^{\textit{Todas las variables no negativas}}$$

En la Figura 1 se presenta una posible implementación del problema en una hoja de cálculo, la que además ha sido resuelta para encontrar la solución óptima. Las celdas de las variables de decisión se han coloreado de amarillo, las que contienen datos con gris, aquellas en las que se han codificado fórmulas en celeste y, finalmente, en verde se presenta la celda con la fórmula de la función objetivo.

Errores comunes: inversión de variables y omisión de restricciones

Un error frecuente y persistente consiste en asignar el coeficiente que relaciona dos variables en un enunciado a la variable incorrecta, lo que resulta en un significado *invertido*. Como un ejemplo característico del error de inversión de las variables, considérese la composición de una brigada de inventario para bosques mixtos como la selva misionera: se ha dispuesto que cada brigada de trabajo se compone con un técnico que *registra* (*i.e.* toma nota de las mediciones y determinaciones del resto del equipo), dos técnicos que *miden* (*i.e.* encargados de tomar las medidas de los árboles) y dos técnicos que *identifican* (*i.e.* determinan las especies arbóreas). Sea B el número total de brigadas y R, M e I el número total de técnicos registradores, medidores e identificadores, respectivamente. Es muy común que ante el enunciado anterior se escriba $B = R + 2M + 2I$, lo que resulta incorrecto a la luz de la *Regla del Coeficiente* que se presentó más arriba. En efecto, y dado que la expresión está medida en número de brigadas, así formulada dice que al asignar un técnico para medir, por ejemplo $M = 1$, ¡se duplica el número de brigadas! O peor aún: que una brigada con 5 técnicos (1 que registra, 2 que miden y 2 que identifican) resulta en un número total de brigadas de 9, lo que resulta una contradicción. Esto ocurre porque se asocia "dos técnicos para medir" con $2M$ y de ahí $B = 2M$.

Razonando el enunciado como $B = \_\_M$ se puede ver que falta un coeficiente que convierta las unidades entre las variables a ambos lados de la igualdad, y que eso se puede lograr haciendo que la variable varíe o aumente en 1. Así, se debería escribir $B = 0.5M = \frac{1}{2}M$, puesto que lo que se quiere expresar es que el número total de brigadas se puede determinar como el número que resulta ser la mitad del número de técnicos que miden. Esto mismo se puede ver mejor con $2B = M$, lo que dice que una brigada adicional demanda 2 técnicos adicionales para medir, o sea 2 técnicos para medir por cada brigada. Por supuesto que lo mismo vale para $2B = I$. La otra expresión que se puede escribir a partir del enunciado es $B = R$ y lo que expresa es que el número total de brigadas es igual al número total de técnicos que registran.

Decisión			
	N° de cajas en cartoné	N° de cajas a la rústica	
A despachar	5	5	
Datos			
	N° de libros en cartoné	N° de libros a la rústica	
Cajas en cartoné	5	0	
Cajas a la rústica	2	6	
En el depósito	65	40	
Requerimientos			
Cajas	Despachadas		Disponibles/Despachables
Número de cajas en cartoné	5	≤	7
Número total de cajas	10	≤	10
Libros	Disponibles		Requeridos
Número total de libros en cartoné	90	≥	80
Número total de libros a la rústica	80	≥	80
Resultado			
Número total de libros en el depósito de la librería		170	

Figura 1. Una posible implementación en hoja de cálculo del Primer ejemplo.

Estos errores se presentan con frecuencia en problemas cuyas variables de decisión dependen enteramente del valor de otras variables, como en el ejemplo de las brigadas inventariales que se dio. La inclusión de este tipo de variables adicionales no es un error en sí mismo y pueden ayudar mucho a la legibilidad y comprensión del problema. Lo que sí constituye un error es no incluir las restricciones necesarias para definirlas. Para evitar estos errores se propone adoptar la noción de *variable auxiliar* para estas variables adicionales. En principio se trata de aquellas variables cuyo valor se puede inferir del valor de las *variables independientes* o esenciales, es decir aquellas que representan las decisiones a tomar.

Es natural considerar a las variables independientes como las que representan de manera directa las decisiones que se toman y a las auxiliares como el resultado inevitable de tales decisiones. Sin embargo, esto no siempre resultará incuestionable. Como es usual, el papel que desempeña cada una de las variables en el modelo es el resultado de las representaciones establecidas por quien formula el modelo. Por ejemplo, en la situación que se puede expresar como el *vuelto* es igual a la diferencia entre el dinero con que *se paga* un bien y su *precio* hay tres variables; y cualquiera puede ser la auxiliar, particularmente el *vuelto* o el dinero *pagado*, porque el *precio* seguramente es parte del enunciado. Lo importante es clasificar las variables en esenciales y derivadas siguiendo criterios pertinentes. Esto permitirá aplicar la *Regla de la Variable Auxiliar* que indica, simplemente, que es necesario escribir una igualdad como restricción para definir una variable auxiliar en términos de otras variables.

Segundo ejemplo

En un aserradero el plan de corte programado puede procesar cada metro cúbico de madera rolliza en 20 minutos para producir 152 pies tablas de *tablas cortas* (1”x6”x8pies) y 100 pies tablas de *tablas largas* (1”x6”x10pies). Cualquiera de estos dos tipos de tablas sin re-procesamientos adicionales se pueden vender directamente, o bien pueden re-manufacturarse para elaborar machimbres. Una tabla corta se puede vender a 130$, pero si se reprocesa durante 5 minutos (canteado y dimensionado, cepillado y perfilado) se puede producir 1 pieza de *machimbre corto* (0,5”x5”x8pies) que se vende a 350$. Por su parte, una tabla larga se puede vender a 150$, pero si se reprocesa durante 6 minutos (canteado y dimensionado, cepillado y perfilado) se puede producir 1 pieza de *machimbre largo* (0,5”x5”x10pies) que se vende a 450$. Para cualquiera de los dos tipos de machimbre, el reprocesamiento agrega un costo de 50$ por pieza procesada. Considerando el personal que se puede afectar durante el próximo mes, el aserradero dispone de un tiempo de procesamiento de 160 horas. Por otra parte, en la playa de trozas se han almacenado 300 m^3 de madera rolliza para procesar, los que se adquirieron a razón de 1.250 $/$m^3$. Se espera vender todo lo que se produzca. Determinar como se maximiza el retorno económico de este aserradero.

Si se analiza el enunciado se pueden identificar fácilmente los dos recursos limitantes, la materia prima y el tiempo de procesamiento. Considerando que tanto las tablas cortas como las largas pueden ser reprocesadas para producir machimbre, puede resultar conveniente considerar la posibilidad de adoptar variables auxiliares. Específicamente, se puede pensar en un par de variables para representar las cantidades de tablas de cada tipo que se producirán en el primer procesamiento. Luego, estas cantidades se subdividirán en una parte de tablas que será vendida como tales y en otra parte de tablas que serán reprocesadas para ser vendidas como piezas de machimbre. Por ejemplo:

TCP : N.° de tablas cortas producidas
TLP : N.° de tablas largas producidas

Luego, no será muy difícil obtener las ecuaciones para representar que estas cantidades pueden ser vendidas como tales o como piezas de machimbre, recordando que estas últimas se obtienen a razón de una por tabla reprocesada. Si se definen, por ejemplo:

TCV : N.° de tablas cortas vendidas como tales
TLV : N.° de tablas largas vendidas como tales
MCV : N.° de piezas de machimbre corto vendidas
MLV : N.° de piezas de machimbre largo vendidas

se pueden obtener las dos ecuaciones, *i.e.* $TCP = TCV + MCV$, para las fracción *corta* y $TLP = TLV + MLV$, para la fracción *larga*. Ambas ecuaciones pueden ser consideradas como las que definen a las variables auxiliares; sin embargo, en este problema es mejor considerarlas como ecuaciones *de conservación* o *de balance*. Incluso puede ayudar a una mejor comprensión observar que a ambos lados de la igualdad las unidades son coherentes dado que la cantidad de tablas cortas vendidas como tales se puede sumar con la cantidad de piezas de machimbre corto obtenidos de ellas a razón de una pieza por tabla.

Si las dos ecuaciones que se presentaron no son las que sirven para definir a las variables auxiliares, entonces es lícito preguntarse cómo definirlas. Para ello se debe recordar que para describir a la materia prima como un recurso limitante se debe escribir una restricción. Si se define:

MRP : Volumen de madera rolliza procesada (en m^3)

se puede escribir $MRP \leq 300$ como la inecuación que acota la madera rolliza disponible. Ahora bien, apenas se obtiene el valor de *MRP* que se procesará para maximizar el retorno económico, automáticamente quedan determinadas las cantidades de tablas cortas y largas que se producirán, es decir *TCP* y *TLP*. Justamente es esta observación la que debe ser tomada como la justificación para calificar a estas últimas dos variables como auxiliares. Pero como ambas tienen unidades diferentes a la madera rolliza procesada (m^3 contra cantidades de tablas), es recomendable invocar la *Regla del Coeficiente* para escribir las igualdades que las definan. Por ejemplo, se puede escribir $TCP = \_\_MRP$ para ver que es necesario un coeficiente que convierta las unidades volumétricas de la madera rolliza en una cantidad de tablas cortas. También se puede razonar preguntando qué pasa si la variable de decisión aumenta en 1 (MRP += 1). La respuesta en ambos casos es cuantas tablas cortas se producen por cada unidad de volumen de madera rolliza (expresada en m^3) que se procesa. El coeficiente se calcula considerando que por cada metro cúbico procesado se obtienen 152 pie tablas de las *cortas* y cada una de estas tablas *cortas*, por sus dimensiones, tiene un volumen de 4 pie tablas. Entonces, el número de tablas por metro cúbico procesado es 152 [pie tabla/m^3] / 4 [pie tabla/tabla] = 38 tablas cortas/m^3 de madera rolliza. De manera análoga, 100 [pie tabla/m^3] / 5 [pie tabla/tabla] = 20 tablas largas/m^3 de madera rolliza. Así, las dos ecuaciones de definición de las variables auxiliares quedan $TCP = 38MRP$ y $TLP = 20MRP$.

Sólo resta considerar el tiempo de procesamiento como restricción y el retorno económico como función objetivo. Ambas determinaciones son más sencillas y también pueden hacerse con la *Regla del Coeficiente*. En el caso del tiempo de procesamiento, la función es $20MRP + 5MCV + 6MLV \leq 9.600$, expresada en minutos a ambos lados de la desigualdad. En el caso de la función objetivo, se venden cuatro productos y se compra la materia prima, por lo que la contribución a los retornos económicos se calcula con $130TCV + (350\text{-}50)MCV + 150TLV + (450\text{-}50)MLV - 1.250MRP$ y que resulta expresada en pesos. Considerando todo lo expresado y agregando las restricciones de no-negatividad para todas las variables de decisión, el problema queda finalmente:

Maximizar

$$\underbrace{\textit{Contribución al beneficio económico (en \$)}}_{\mathbf{130}\ \boldsymbol{TCV} + \mathbf{(350\text{-}50)}\ \boldsymbol{MCV} + \mathbf{150}\ \boldsymbol{TLV} + \mathbf{(450\text{-}50)}\ \boldsymbol{MLV} - \mathbf{1.250}\ \boldsymbol{MRP}}$$

Sujeto a:

$$\underbrace{\textit{Volumen de madera rolliza procesada (en } m^3\textit{)}}_{\boldsymbol{MRP}} \le \underbrace{\textit{Volumen de madera rolliza disponible (en } m^3\textit{)}}_{\mathbf{300}}$$

$$\underbrace{\textit{Tiempo de procesamiento consumido (en minutos)}}_{\mathbf{20}\ \boldsymbol{MRP} + \mathbf{5}\ \boldsymbol{MCV} + \mathbf{6}\ \boldsymbol{MLV}} \le \underbrace{\textit{Tiempo de procesamiento disponible (en minutos)}}_{\mathbf{9.600}}$$

$$\underbrace{\textit{N.° de tablas cortas producidas}}_{\boldsymbol{TCP}} = \underbrace{\textit{N.° de tablas cortas producidas}}_{\mathbf{38}\ \boldsymbol{MRP}}$$

$$\underbrace{\textit{N.° de tablas largas producidas}}_{\boldsymbol{TLP}} = \underbrace{\textit{N.° de tablas largas producidas}}_{\mathbf{20}\ \boldsymbol{MRP}}$$

$$\underbrace{\textit{N.° de tablas cortas producidas}}_{\boldsymbol{TCP}} = \underbrace{\textit{N.° total de piezas cortas vendidas}}_{\boldsymbol{TCV} + \boldsymbol{MCV}}$$

$$\underbrace{\textit{N.° de tablas largas producidas}}_{\boldsymbol{TLP}} = \underbrace{\textit{N.° total de piezas largas vendidas}}_{\boldsymbol{TLV} + \boldsymbol{MLV}}$$

$$\underbrace{\textit{Todas las variables no negativas}}_{\boldsymbol{MRP} \ge 0;\ \boldsymbol{TCP} \ge 0;\ \boldsymbol{TCV} \ge 0;\ \boldsymbol{MCV} \ge 0;\ \boldsymbol{TLP} \ge 0;\ \boldsymbol{TLV} \ge 0;\ \boldsymbol{MLV} \ge 0}$$

En la Figura 2 se ha codificado una implementación del problema en una hoja de cálculo, la que además ha sido resuelta para encontrar la solución óptima. Como en el caso anterior, las celdas de las variables de decisión se colorearon en amarillo, los datos en gris, fórmulas y cálculos en celeste y la función objetivo en verde. Dado que puede no ser evidente, en esta planilla se ha codificado en las celdas de los lados derechos de las filas de definiciones y balances (cuatro celdas) que las mismas tomen su valor de las dos celdas etiquetadas TCP y TLP que se han destacado con un recuadro, las cuales además han sido señaladas, como corresponde, como *celdas variables* al cargar el problema en el *solver*.

Finalmente, en el Anexo se presenta una *Guía...* que sintetiza todas las ideas que se han presentado y que se puede usar de manera prácticamente autónoma de este documento, como una lista de verificación para formular cualquier problema de programación lineal.

Tiempo procesamiento madera rolliza	20	minutos por m3						
1 m3 de madera rolliza	152	pie tabla	Tablas cortas					
	100	pie tabla	Tablas cortas					
	Dimensiones	Precios						
Tablas cortas	1"x6"x8pies	$130,00	por unidad					
Tablas largas	1"x6"x10pies	$150,00	por unidad	Tiempo adicional reprocesamiento				
Machimbre corto	0,5"x5"x8pies	$350,00	por unidad	5	minutos			
Machimbre largo	0,5"x5"x10pies	$450,00	por unidad	6	minutos			
	Volumen				Número de tablas			
1 tabla corta	4	pie tabla	152	pie tabla	38	tablas cortas		
1 tabla larga	5	pie tabla	100	pie tabla	20	tablas largas		
Precio madera rolliza	$1.250,00	por unidad			**TCP/V**	Tablas Cortas	Producidas/Vendidas	
Costo reprocesamiento a machimbre	$50,00	por unidad			**TLP/V**	Tablas Largas	Producidas/Vendidas	
Tiempo procesamiento disponible	160	horas			**MCV**	Machimbre Corto Vendido (piezas)		
Tiempo procesamiento disponible	9600	minutos			**MLV**	Machimbre Largo Vendido (piezas)		
Madera rolliza disponible	300	m3			**MRP**	Madera Rolliza Procesada (m3)		
	TCP	11400	TLP	6000				
	TCV	MCV	TLV	MLV	MRP			
Variables de decisión	11400	0	5400	600	300		Beneficio económico	
Precios netos	$130	$300	$150	$400	($1.250)		$2.157.000	
Madera rolliza disponible					1	300	≤	300
Tiempo de procesamiento disponible		5		6	20	9600	≤	9600
Definición TCP					38	11400	=	11400
Definición TLP					20	6000	=	6000
Balance 1	1	1				11400	=	11400
Balance 2			1	1		6000	=	6000

Figura 2: Una posible codificación del Segundo Ejemplo en una planilla de cálculo.

Bibliografía

Stevens SP & SW Palocsay. 2004. A Translation approach to teaching linear program formulation. INFORMS Transactions on Education 4(3): 38-54. https://doi.org/10.1287/ited.4.3.38

Anexo
Guía para Formular un Problema de Programación Lineal

1. Entender el problema. Ignorar los números que aparecen en el enunciado del problema y concentrarse en identificar las expresiones verbales características de las partes de un Problema de Programación Lineal:

   - Objetivo (meta global)
   - Restricciones (limitaciones y requerimientos)
   - Variables de decisión (actividades bajo control directo)

   Realizar una gráfica, elaborar una tabla o encontrar una solución tentativa puede ayudar a entender mejor la estructura del problema.

2. Escribir la formulación del modelo de Programación Lineal en cantidades mensurables. Una cantidad mensurable es el número de unidades de algo. Traducir la expresión castellana del objetivo en una cantidad mensurable. Definir cada variable de decisión como una cantidad mensurable. Re-escribir cada restricción como una relación entre dos cantidades mensurables, asimilándola a alguna de las siguientes categorías:

Tipo de restricción	**Expresión castellana**	**Traducción a cantidades mensurables**
Recursos limitados	*No se puede usar más que lo disponible*	*N.° de unidades usadas < N.° de unidades disponibles*
Umbral de desempeño	*Se debe satisfacer el cupo o la cuota*	*N.° de unidades obtenidas > N.° unidades requeridas*
Tope de desempeño	*No se debe exceder el límite*	*N.° de unidades obtenidas < N.° unidades permitidas*
Balance	*Los flujos deben conservarse*	*N.° de unidades que entran = N.° de unidades que salen*

3. Traducir la formulación en cantidades mensurables del problema en un modelo matemático. Aplicar la Regla del Coeficiente a cada cantidad mensurable del problema, tratando de *completar los espacios en blanco.*

Regla del Coeficiente

Para traducir una cantidad mensurable del problema en una expresión matemática equivalente, seguir este procedimiento:

a. Seleccionar una de las variables de decisión y asignarle una denominación, por ejemplo: X.
   1. Expresar, en buen castellano, qué significa que X se incremente en 1.
   2. Asumir que el cambio identificado en el paso anterior ocurre mientras que todas las variables de decisión restantes permanecen sin cambios. ¿Por cuánto aumenta la cantidad mensurable, es decir aquella que se intenta traducir? La respuesta será un número y este número será el coeficiente de X en la representación matemática de la cantidad mensurable.

b. Repetir el paso a. para cada variable de decisión del problema. Consolidar los resultados.

Imaginar que todas las variables de decisión se igualan a cero. ¿Qué implicaría esto en términos del problema original? Si esta situación se presenta, ¿qué valor debería tomar la cantidad mensurable? La respuesta a esta pregunta es el término constante. Agregar esto al resultado obtenido en el paso b.

4. Aplicar la Regla de la Variable Auxiliar agregando una igualdad como restricción para cada variable auxiliar. Si se han usado variables cuyos valores están completamente determinados por otras variables del problema, la formulación final debe incluir una restricción de igualdad para cada una de tales variables auxiliares que defina como se calcula a partir de aquellas otras variables.

Regla de la Variable Auxiliar

Subdividir el conjunto de las variables de decisión en dos subconjuntos y asignarles una denominación, por ejemplo: I y A. La subdivisión debe cumplir dos requisitos:

a. El valor de cualquier variable de A siempre puede ser determinado conociendo solamente los valores de las variables de I y la información provista en el enunciado.
b. El valor de cualquier variable de I no puede ser determinado conociendo solamente los valores de las restantes variables de I y la información provista en el enunciado.

Dada tal subdivisión, se llamará variables independientes a los elementos de I y variables auxiliares a los miembros de A.

5. Validar el modelo. Insertar los números del enunciado, aquellos que se ignoraron en el punto 1, en sus correspondientes expresiones matemáticas para asegurarse que las mismas son correctas y tienen sentido.