Formulación de Problemas de Programación Lineal

Pablo Yapura
Investigación Operativa
Septiembre del 2002 (revisado: junio del 2018)

Introducción

A la ciencia de la administración le interesa el funcionamiento de las organizaciones y para ello adopta el punto de vista sistémico. Su propósito, entonces, es proponer las formas de intervención que tiendan a mejorar el bienestar de las organizaciones tanto como sea posible, de acuerdo con algún criterio de optimalidad adoptado. Para describir el funcionamiento de tales organizaciones es que se desarrollan modelos, que no son más que abstracciones o representaciones simbólicas de los aspectos más relevantes del sistema bajo estudio. En el más alto nivel de abstracción, la ciencia de la administración usa intensivamente los modelos matemáticos, entendidos como una colección de expresiones matemáticas que colectivamente describen el funcionamiento de un sistema. Así planteado, las matemáticas pueden auxiliar el proceso de resolver el problema esencial de la investigación operativa, es decir la obtención de una solución que describa el estado óptimo o deseado del sistema.

Como un caso particular, el problema de la Programación Lineal consiste en determinar los valores de las variables del sistema que maximicen o minimicen una función lineal en todas sus variables, denominada objetivo, que verifiquen un sistema de restricciones lineales y que sean no-negativas o pertenezcan a un rango, igualmente no-negativo en sus límites (Dantzig & Thapa, 1997). Pero la solución de un problema es usualmente la etapa más simple, toda vez que el propio planteo del problema y su formulación matemática es la etapa más crítica.

Desarrollar modelos es una tarea difícil por la multiplicidad y complejidad de factores que la realidad suele presentar, a menudo caracterizados por una dinámica extremadamente ambigua. Sin embargo, resulta ser una tarea enriquecedora, fundamentalmente en términos de la mejor comprensión que se logra acerca del funcionamiento del sistema. El éxito y la utilidad de un modelo están totalmente controladas por el grado de representación de la realidad que el modelo ha logrado. Cuando tales condiciones se satisfacen, el modelo matemático se convierte en una herramienta analítica poderosa por su facilidad de manipulación, la coherencia y precisión de los resultados que entrega y porque las relaciones entre las variables quedan planteadas de manera explícita (Dykstra, 1984). Además de un conocimiento acabado del sistema que se pretende emular, la etapa de desarrollo y formulación de los modelos requiere creatividad, experiencia y capacidad de razonar, sobre todo inductivamente.

Para mitigar en parte la complejidad que esta etapa plantea, se pueden señalar una serie de características que se presentan recurrentemente en la formulación de un modelo que explique el comportamiento de un sistema susceptible de ser representado como un problema de programación lineal. Dantzig & Thapa (1997) sugieren que este tipo de problemas se pueden formular de dos maneras generales: mediante el *abordaje de columnas* (recetas/actividades) por una parte, y mediante el *abordaje de filas* (balance de materiales), por otra. Ambos puntos de vista deberían resultar en el mismo modelo final, de modo que la adopción de alguno de ellos se hará primariamente por la forma en que el responsable de la formulación concibe el problema que debe resolver. En cierto tipo de situaciones será más fácil seguir alguno de los abordajes señalados en particular, aunque para lograr una mejor comprensión de la situación problemática que se debe solucionar, lo más conveniente será ensayar ambos puntos de vista en todos los problemas. Adaptado de Dantzig & Thapa (1997), se presentarán a continuación ambos puntos de vista de manera más detallada.

El abordaje de columnas (recetas/actividades)

El sistema puede ser concebido como un todo que puede ser descompuesto en un número determinado de funciones elementales denominadas *actividades*, que puede asimilarse a una receta de cocina. Estas actividades deben ser consideradas como un tipo de caja negra hacia la cual fluyen insumos tangibles (mano de obra, materiales y equipos, etc.) y del que salen productos (intermedios, finales, manufacturas, personal entrenado, etc.). Al analista no le interesa lo que ocurre dentro de la caja negra (como al cocinero no le interesan las reacciones químicas que se producen en la cacerola), sino las tasas de los flujos de entrada (ingredientes) y salida (platos de comida). Cada tipo de flujo se denomina *ítem*. La magnitud de cada actividad se denomina *nivel de actividad* y para su modificación es necesario cambiar las cantidades de cada tipo de flujo de entrada y salida de la misma. En la programación lineal estos valores no están definidos sino que constituyen las incógnitas a determinar, con el requerimiento de cumplir ciertas especificaciones. Los pasos para plantear un problema con este abordaje son:

1. *Definir el conjunto de actividades*. Se debe descomponer todo el sistema bajo estudio en todas sus funciones elementales, los procesos o actividades, y adoptar para cada una de ellas las unidades en término de las cuales sus cantidades o niveles pueden ser medidos. Por ejemplo, la elaboración de un escritorio es una actividad que se define por el propósito de desarrollar un plan para completar la receta de ítems necesarios para producir un escritorio. El número de escritorios elaborados es el nivel de actividad y constituye la variable de decisión a ser determinada. Usualmente, x_j se usa para simbolizar el nivel correspondiente a la actividad j.
2. *Definir el conjunto de ítems*. Se deben determinar las clases de objetos o ítems que son necesarios como insumos, o que resultan como producto de las actividades, y elegir una unidad para medir cada uno de ellos. Obviamente, los únicos ítems que se necesita considerar son aquellos que constituyen potenciales cuellos de botella. Seleccionar uno de ellos de forma tal que la cantidad neta del mismo producida por el sistema como un todo mida el *costo* (o tal que su opuesto mida el *beneficio* de todo el sistema). Por ejemplo, el *tiempo en la carpintería* y el *tiempo en la línea de acabado*, ambos medidos en horas, son dos ítems diferentes. El *dinero* es otro ítem diferente, medido en pesos. Aunque normalmente el costo o beneficio es medido en términos monetarios, habrá situaciones en las cuales sea conveniente medir la *eficiencia* del sistema en términos de algún recurso escaso que, como insumo, debe ser conservado. Alternativamente, la eficiencia también se puede expresar en términos de la unidad de medida de cualquier ítem cuya producción total se quiere maximizar con el funcionamiento del sistema. Usualmente, i se usa para simbolizar el tipo de ítem consumido o producido por las actividades.
3. *Definir los coeficientes insumo-producto*. Se debe determinar la cantidad de cada ítem consumido o producido por la operación de cada actividad en su *nivel unitario*. A estos números, que son equivalentes a las cantidades indicadas para cada ingrediente en una receta de cocina, se los denomina *coeficientes insumo-producto* de la actividad y actúan como factores de proporcionalidad entre los niveles de actividad y los flujos de ítems. Usualmente, a_{ij} simboliza estos coeficientes para el ítem i usado o producido en la actividad j. En el ejemplo de la manufactura de escritorios, a_{ij} puede ser el tiempo necesario en la línea de carpintería i para producir una unidad del tipo j de escritorios. En aplicaciones económicas, es convencional anotar en la columna de la actividad el valor del coeficiente con signo negativo, si el ítem es requerido, y con signo positivo, si el ítem es producido por la actividad. Esta convención es arbitraria y lo realmente importante es mantener la consistencia.
4. *Especificar los flujos exógenos*. Todo lo externo al sistema es *exógeno*. Se deben especificar las cantidades exógenas de cada ítem que se proveen desde el exterior hacia el sistema. Análogamente se deben especificar las cantidades exógenas que el sistema debe proveer al exterior. Usualmente, estas magnitudes se denotan con b_i para el ítem i. En el ejemplo de la manufactura de escritorios, los tiempos totales disponibles en cada una de las líneas de procesamiento, obviamente medidos en horas, constituyen tales flujos exógenos. Por el supuesto de aditividad, cada una de estas cantidades debe ser igual al monto total de cada ítem consumido o producido por las actividades.
5. *Establecer las ecuaciones de balance de materiales*. Se deben asignar las incógnitas que simbolizan a los niveles de actividad x_j, usualmente no-negativas, a todas las actividades. Luego, para cada uno de los ítems, se pueden escribir fácilmente las ecuaciones de *balance de materiales*, en las que se establece que la suma algebraica de los flujos de aquel ítem, en todas las actividades en las que está involucrado (y que resulta ser el producto de los niveles de actividad por el correspondiente coeficiente insumo producto), es igual al flujo exógeno del ítem. Puesto que se

debe considerar la posibilidad de que se presenten *déficits* o *superávits* de ítems, es conveniente definir e incluir variables que los representen como actividades. Si no se establecen costos para las deficiencias o excesos de ítems, entonces se pueden escribir los balances de materiales como desigualdades. Pero si se desea forzar la solución para que no presente excesos o defectos, o si se desea asegurar que todos los costos y penalidades asociadas a una carencia han sido consideradas, o que los ingresos asociados con la venta de un superávit han sido tenidos en cuenta, entonces las relaciones deben plantearse como ecuaciones.

El abordaje de columnas presentado requiere que las actividades tengan niveles no-negativos y que todas las ecuaciones de balance de materiales (restricciones) sean planteadas como igualdades estrictas. Esto implica que normalmente el modelo no terminará de ser formalizado en el primer intento puesto que las actividades relacionadas con la parte no usada de los recursos, al igual que aquellas relacionadas con la superación de los requerimientos mínimos (colectivamente designadas como *holguras*, siendo *positivas* en el primer caso y *negativas* en el segundo), son descuidadas hasta que el establecimiento de las ecuaciones de balance material fuerzan su definición e inclusión. Si esto ocurriera, será necesario volver a recorrer los cinco pasos desde el principio para completar la formulación del modelo.

El abordaje de filas (balance de materiales)

En muchas situaciones, será más natural desarrollar un modelo de programación lineal expresando directamente las relaciones del balance de materiales en términos de las variables de decisión. Los pasos podrían ser:

1. *Definir las variables de decisión.* Este paso es idéntico al ya descripto en el abordaje de actividades. Se deben definir todas las variables de decisión y sus unidades de medida, es decir las variables cuyos niveles representen las cantidades de todo aquello que se puede realizar para el cumplimiento del objetivo.
2. *Definir el conjunto de ítems.* Como en el abordaje de actividades, se deben determinan todas las clases de objetos que potencialmente condicionarán a la solución y elegir una unidad de medida para cada uno de estos ítems. También se deben identificar las cantidades disponibles o los requerimientos establecidos para cada uno de ellos (*i.e.* los flujos exógenos).
3. *Establecer las restricciones y la función objetivo.* Para cada uno de los ítems definidos, se debe escribir la restricción asociada con su propia limitación, cuantitativamente expresada. Para ello será necesario determinar las cantidades unitarias que cada variable de decisión consume o produce de cada ítem (*i.e.* el coeficiente insumo-producto), para luego relacionarlas con los correspondientes flujos exógenos limitantes. Esto resultará en un sistema de ecuaciones o inecuaciones que expresará el balance de materiales, de acuerdo con la consideración que se haya hecho para las situaciones de superávit y déficit de los ítems. Habiendo seleccionado alguno de los ítems para medir la eficiencia del sistema, se puede proceder a escribir la función objetivo relacionando las variables de decisión con los coeficientes que expresan su costo (o beneficio) unitario.

Un problema de combinación (mezcla) de productos como ejemplo

Un aserradero que dispone de una línea de carpintería produce cuatro modelos diferentes de escritorios. Por la organización de las tareas, se puede considerar que el aserradero dispone de dos sub-líneas de procesamiento en la carpintería. La elaboración de cada escritorio se inicia en la línea de ensamblado en la que se cortan las tablas para producir las piezas que luego se encastran y encolan para constituir un escritorio. Una vez armado, cada escritorio se pasa a la línea de acabado en la que son lijados, pulidos y laqueados. El número de horas-hombre necesarias para producir los cuatro tipos de escritorio en cada línea de procesamiento, junto con el ingreso neto (entendido en este contexto como el ingreso bruto descontado de costos variables) que produce la venta de una unidad de cada uno de ellos, se muestran en la siguiente tabla:

Línea de procesamiento	Escritorio 1	Escritorio 2	Escritorio 3	Escritorio 4
Ensamblado (horas.unidad^{-1})	4	9	7	10
Acabado (horas.unidad^{-1})	1	1	3	40
Ingreso neto ($.unidad^{-1})	12	20	18	40

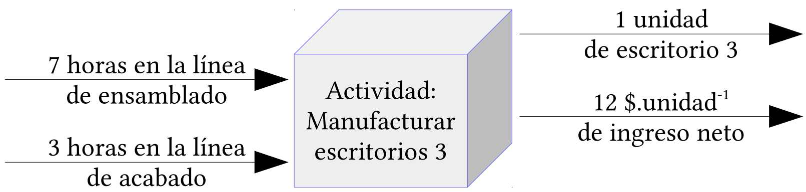
Para los próximos seis meses, en la línea de ensamblado se podrá disponer de un total de 6.000 horas-hombre, mientras que en la otra línea se estima que la disponibilidad alcanzará como máximo 4.000 horas-hombre. Asumiendo que no habrá limitaciones en las materias primas y otros insumos necesarios para la producción, y que cada escritorio producido podrá ser vendido sin restricciones, se debe determinar el número de escritorios de cada uno de los modelos que se necesita producir (*i.e.* la combinación o mezcla óptima de productos) para maximizar el ingreso neto en los próximos seis meses.

Aplicando el abordaje de columnas

El *conjunto de actividades* está constituido por las cuatro actividades de manufacturar los cuatro tipos de escritorio, *i.e.* manufacturar escritorios 1, manufacturar escritorios 2, etc. Todas ellas están medidas en número de escritorios producidos y representadas por $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, etc.

El *conjunto de ítems* está constituido por la capacidad de procesamiento en la línea de ensamblado y en la línea de terminación, ambas medidas en horas-hombre. El ingreso neto total también es un ítem al que se simbolizará con $\boldsymbol{z}$ y está medido en unidades monetarias ($).

Los *coeficientes insumo-producto* son los que constituyen el cuerpo superior de la tabla dada. Alternativamente pueden ser vistos como en la siguiente figura que emula una caja negra a la que fluyen insumos y de la que emanan productos e ingresos, con los datos del escritorio 3 por ejemplo:



Los *flujos exógenos* son las cantidades disponibles de cada ítem que es un insumo para el sistema como un todo. Si bien el uso de ambas cantidades totales disponibles (6.000 y 4.000 horas-hombre) no puede excederse, conviene reconocer que una solución factible puedo no necesitar todos los insumos disponibles. Esta observación debe tenerse en cuenta al formular las ecuaciones de balance de materiales.

Los *balances de materiales* deben formularse como ecuaciones matemáticas y recoger todas las definiciones y observaciones anteriores. En particular se puede postular que la limitación impuesta por el tiempo disponible en la línea de ensamblado está dada por una desigualdad:

$$4x_1+9x_2+7x_3+10x_4 \leqslant 6000$$

Sin embargo, esta formulación no respeta la definición que establece que la suma algebraica de todos los flujos del ítem debe igualarse al flujo exógeno del mismo, es decir, debe plantearse como una igualdad estricta. Así se presenta la situación ya descripta, en la que es necesario hacer una segunda pasada para agregar actividades, en particular una actividad que represente la capacidad de procesamiento no usada, una para cada línea y que en este problemas serán *holguras positivas.*

Entonces, a las actividades que ya se habían definido (manufacturar los cuatro tipos de escritorio) se agrega una actividad que represente *no usar la capacidad de procesamiento en la línea de ensamblado* y otra para *no usar la capacidad de procesamiento en la línea de terminación*, ambas medidas en horas-hombre. Esas actividades serán representadas por $\boldsymbol{x_5}$ y $\boldsymbol{x_6}$.

Finalmente, el problema de programación lineal es determinar el valor cuantitativo de

$$x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\quad x_3 \geqslant 0,\quad x_4 \geqslant 0,\quad x_5 \geqslant 0,\quad x_6 \geqslant 0$$

tal que se maximice $\boldsymbol{z}$ y se satisfagan:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
12x_1 & + & 20x_2 & + & 18x_3 & + & 40x_4 & & & & & = & z \\
4x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & + & x_5 & & & = & 6000 \\
x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 40x_4 & & & + & x_6 & = & 4000
\end{array}$$

Aplicando el abordaje de filas

En este ejemplo, la aplicación del enfoque de filas podría sintetizarse explicitando que la *definición de las variables* de decisión es equivalente a la identificación del *conjunto de actividades* del abordaje por columnas. Por su parte, la *definición del conjunto de ítems* equivale al paso homónimo del abordaje por columnas. Finalmente, al *establecer las restricciones y la función objetivo*, el último paso incluye la *identificación de los coeficientes insumo-producto* y de los *flujos exógenos* que permiten escribir las ecuaciones de los correspondientes *balances de materiales.* La única diferencia que se puede notar es que en este abordaje no se demanda explicitar las *variables de holgura y superávit* como en el otro abordaje, de modo que el modelo final quedaría expresado por:

$$x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\quad x_3 \geqslant 0,\quad x_4 \geqslant 0,\quad x_5 \geqslant 0,\quad x_6 \geqslant 0$$

tal que se maximice $\boldsymbol{z}$ y se satisfagan:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
12x_1 & + & 20x_2 & + & 18x_3 & + & 40x_4 & = & z \\
4x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & \leqslant & 6000 \\
x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 40x_4 & \leqslant & 4000
\end{array}$$

Bibliografía

Dantzig GB & MN Thapa. 1997. Linear programming 1: Introduction. Springer-Verlag. New York. 435 pp.

Dykstra DP. 1984. Mathematical programming for natural resource management. McGraw-Hill Book Company. New York. 318 pp.