Regresar a la nota

Contratapa|Domingo, 06 de Noviembre de 2005

Los Siete Puentes de Königsberg

Por Adrián Paenza

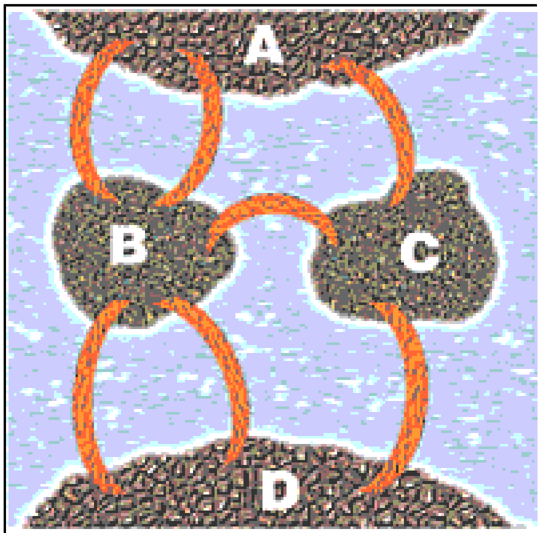


Figura 1

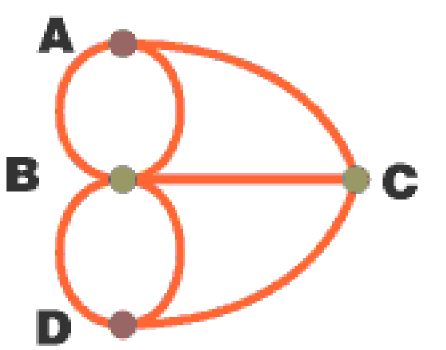
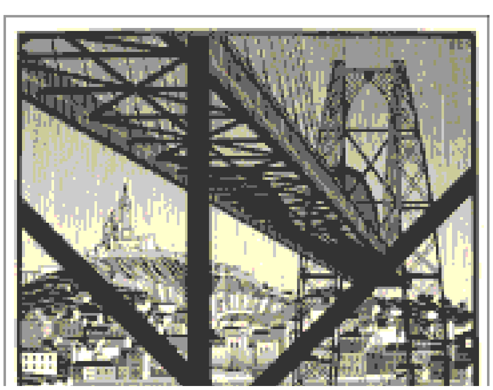


Figura 2



Escher, M.C. - Marseilles - 1936

Figura 3

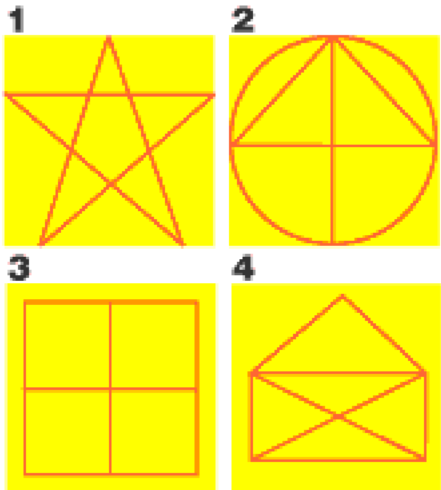


Figura 4

La matemática tiene mala prensa. Eso es obvio. Yo quiero empezar una campaña para modificar la percepción que hay de ella. Me gustaría que le diéramos una segunda oportunidad, una segunda chance. Hoy por hoy, los chicos ya vienen "elegidos" de antemano: la matemática es aburrida, pesada, difícil, etcétera, etcétera. Bueno, no es así. O en todo caso, es así si la seguimos enseñando como hasta ahora. Está claro que los docentes hemos fracasado en nuestro intento de comunicarla, de transmitirla.

Cambiemos entonces. El propósito de esta(s) columna(s) es tratar de revertir la imagen y mostrar ángulos distintos, otras "formas" de hacer matemática que no sean las clásicas del colegio. Sería interesante aproximarse a ella tratando de no dar respuestas a preguntas que uno no se hizo, sino al revés: mostrar problemas, disfrutar de pensarlos y aun de la frustración de no poder resolverlo, abordarlos de manera diferente, y que sean, en todo caso, "disparadores" de preguntas, de nuevas conjeturas, de nuevos desafíos hasta poder descubrir el lugar en donde está escondida tanta belleza.

Quiero empezar con un problema, ingenuo si se quiere. Léalo con cuidado: el enunciado es muy sencillo y uno puede sentarse inmediatamente a pensarlo. Eso sí: bánquese un rato el fastidio si no le sale. Pero dedíquele un tiempo razonable. ¿Qué es razonable? Digamos unos veinte minutos. Si le da para más, métale para adelante. Si no, puede pasar inmediatamente a la respuesta, pero será una lástima, porque se perderá el placer de pensar, de dudar, de frustrarse, de enojarse, de intentar de nuevo... en definitiva, se privará de gozar. Es su decisión. La solución está más abajo, y también aparece una conclusión sobre lo que, también, es hacer matemática. Aquí va.

Todo transcurría a mediados del siglo XVIII, en Königsberg, una ciudad prusiana (devenida luego Kaliningrado, hoy Rusia). La ciudad era atravesada por un río, el Pregel. Además, en el medio del río, había dos islas. Los pobladores habían construido siete puentes para cruzar de una orilla a la otra, pasando por alguna de las islas. La distribución es la que se ve en el dibujo 1. Hay cuatro sectores de tierra, A, B, C y D, y siete puentes.

La pregunta es la siguiente: empezando en cualquier parte de la geografía, ¿es posible recorrer los siete puentes sin pasar dos veces por el mismo? Es decir, uno se para en cualquier lugar (incluso en cualquiera de las dos islas) e intenta cruzar los siete puentes sin repetir. ¿Se puede?

Por supuesto, la tentación mía es escribir la respuesta aquí mismo. La tentación suya, es leer la respuesta “sin pensar” más que un minuto. ¿Y si lo intenta solo/a? Quizá se entretenga y valore el desafío, aunque en principio (o “en final”) no le salga. Es sólo una sugerencia...

Respuesta:*El problema no tiene solución. Es decir, no sé cuánto tiempo le dedicó usted, pero en lo que sigue voy a tratar de explicar por qué no hay manera de recorrer los siete puentes sin repetir ninguno. Pero antes, quiero contarles una breve historia.*

Le pido que me acompañe con esta idea. Mire el siguiente dibujo:

¿Puede relacionarlo con el problema anterior? Es verdad que ahora ya no hay más islas, ni puentes. Ahora hay puntos o vértices que hacen el papel de la tierra firme en el gráfico original, y los arcos que los unen son los que antes, en el dibujo 1, hacían el papel de puentes.

Como se ve, el problema no cambió. El gráfico sí, pero en esencia, todo sigue igual. ¿Cuál sería ahora la nueva formulación del problema? Piénselo solo, si prefiere. Si no, uno podría intentar así: “Dada la siguiente configuración o el siguiente dibujo (el dibujo 2), ¿se puede empezar en cualquier punto o vértice y recorrerlo sin levantar el lápiz ni pasar dos veces por el mismo arco?

Si lo piensa un instante, se dará cuenta de que no hay diferencia conceptual. Es el mismo problema, planteado de dos formas diferentes. Una vez aceptado esto, pensemos juntos por qué no se puede.

Los vértices, entonces, se llaman A, B, C y D. Contemos juntos el número de arcos que salen (o entran) de cada vértice.

Al vértice A llegan (o salen) tres arcos.

Al vértice B llegan (o salen) cinco arcos.

Al vértice C llegan (o salen) tres arcos.

Al vértice D llegan (o salen) tres arcos.

Es decir, en todos los casos, entra (o bien salen, pero es lo mismo) un número impar de arcos.

Ahora pensemos lo siguiente. Supongamos que usted ya comenzó su camino en alguna parte, salió de algún vértice y cayó en otro que no es ni el inicial ni el final. Si es así, entonces a ese vértice usted llegó por un arco y tendrá que salir por otro. Tuvo que haber usado un arco para llegar, porque usted sabe que ése no es el inicial, y sabe que tiene que usar un arco para salir, porque sabe que ése no es el final. Por favor, antes de avanzar, piense en lo que escribí recién, pero piénselo solo, eventualmente haciendo un dibujo.

¿Cuál es la moraleja de esto? Una posible moraleja es que si uno cae en algún vértice en el recorrido, que no es ni el inicial ni el final, entonces, el número de arcos que salen (o entran) tiene que ser par. ¿Por qué? Porque uno necesita llegar por uno y salir por otro. Luego, necesita que el número de arcos que llegan y salen a ese vértice sea par.

Ahora bien. Si eso es cierto, ¿cuántos vértices pueden, en principio, tener un número de arcos que entran o salen que sea impar? (Piense la respuesta.... Si quiere, claro.)

La respuesta es que hay sólo dos vértices que pueden tener un número impar de arcos que llegan o salen, y éstos son, eventualmente, el vértice inicial (que es el que uno elige para empezar el recorrido) y el vértice final (que es el que uno eligió como final del recorrido).

Una vez entendido esto, lo que queda por hacer es volver a mirar en el dibujo original, y contar cuántos arcos entran o salen de cada vértice.

Como sabemos (porque ya hicimos la cuenta más arriba) que a todos los vértices llega o sale un número impar de arcos, entonces, el problema NO TIENE SOLUCION. Porque de acuerdo con lo que hemos visto, a lo sumo, sólo dos de los vértices pueden tener un número impar de arcos que llegan. Y en el caso nuestro (el de los Puentes de Königsberg), todos tienen un número impar.

Varias observaciones finales:

a) Proponer un modelo como el que transformó el problema original (el de los siete puentes) en un gráfico como el dibujo 2, es hacer matemática.

b) Este problema fue uno de los primeros que inauguró una rama de la matemática que se llama teoría de grafos. Y también la topología. Uno de los primeros nombres que tuvo la teoría de grafos fue el de geometría de posición. Con el ejemplo de los puentes de Königsberg, se advierte que no interesan ni tamaños ni formas, sino posiciones relativas de los objetos.

c) El problema es ingenuo, pero el análisis de por qué no se puede requiere pensar un rato. El primero que lo pensó y lo resolvió (ya que muchos fracasaron) fue un suizo, Leonhard Euler (1707-1783), uno de los matemáticos más grandes de la historia. A él se le ocurrió la demostración del teorema que prueba que no importa qué camino uno recorra, nunca tendrá éxito. Entender que hace falta un teorema que demuestre algo general, para cualquier grafo (o dibujo), también es hacer matemática. Es obvio que una vez que uno tropezó con un problema de estas características (ver más abajo) se pregunta cuándo se puede y cuándo no se puede encontrar un camino. Euler dio una respuesta.

d) Encuentre en esta misma página distintos grafos (ver figura 4) y decida si se podrían o no recorrer sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces por el mismo arco. En el caso de que se pueda, encuentre un trayecto. Y en el caso de que no, explíquese a usted mismo la razón.

Soluciones:

El dibujo 1 tiene solución, porque de todos los vértices sale (o entra) un número PAR de arcos.

El dibujo 2 tiene solución, porque hay sólo dos vértices a los cuales llega (o sale) un número IMPAR de arcos.

El dibujo 3 no tiene solución, porque hay cuatro vértices a los que llega (o sale) un número IMPAR de arcos.

El dibujo 4 tiene solución, porque hay sólo dos vértices a los cuales llega (o sale) un número IMPAR de arcos.
