Introducción a la Investigación de Operaciones

Unidad didáctica 3: Extensiones de la programación lineal

- **Alcance:** En esta unidad didáctica se introducirán numerosos modelos matemáticos, principalmente lineales y deterministas. Algunos de los modelos tienen formulaciones que ayudan a superar limitaciones de la programación lineal. Otros modelos extienden la generalidad de la programación lineal para representar y resolver problemas. Todos los modelos que se presentarán pueden ser considerados prototípicos y el abordaje para su estudio se hará a partir de las similitudes y diferencias con el problema de la programación lineal.
- **Contenidos:** Programación entera y binaria. Fundamentos y aplicaciones. El modelo lineal, su formulación y solución. Modelos mixtos.

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
Universidad Nacional de La Plata
La Plata – Julio del 2020 – Pablo Yapura

Programación Entera

Es la extensión de la Programación Lineal (y de la Programación Matemática en particular) que se ha desarrollado para superar la limitación impuesta por el requerimiento de **continuidad** de las variables de la PL.

● ● ☼ ☼ ☼ ● ●

En muchas situaciones reales lo más conveniente será ignorar este requerimiento de representación, resolver el problema de PL resultante y truncar (o redondear) la solución para convertirla en entera. Este procedimiento debe ser aplicado con precaución puesto que no garantiza que la solución entera así obtenida será óptima.

● ● ☼ ☼ ☼ ● ●

Por lo demás, los problemas de programación entera sólo se distinguirán de su equivalente continuo por el agregado de las restricciones que establezcan que una o más, y tal vez todas, las variables deben ser enteras.

Programación Entera

El agregado de estas restricciones (de integridad en las variables) redefine el espacio de soluciones factibles y, consecuentemente, resultará en valores óptimos que, **como mucho**, serán iguales a su equivalente continuo. De forma más general, en problemas de maximización se puede escribir:

$$z^{*}_{MIP} \leqslant z^{*}_{LP}$$

● ● ☼ ☼ ☼ ● ●

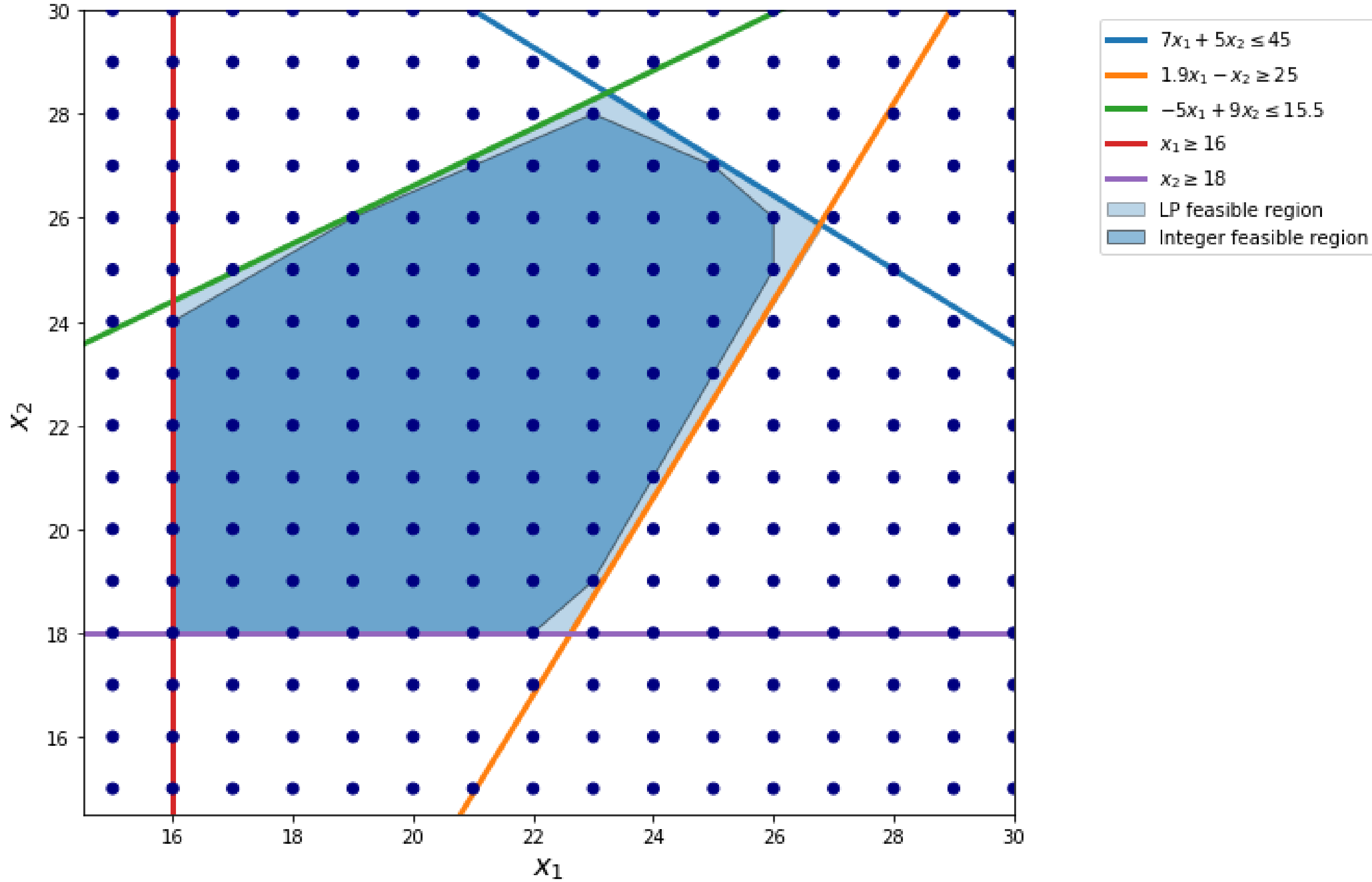
Esta observación implica que normalmente las soluciones enteras serán interiores (y también inferiores o dominadas) con relación al problema relajado y que, al no ser básicas, el Símplex no podrá encontrarlas. Entonces, son necesarios otros algoritmos específicos para encontrar las soluciones enteras.

● ● ☼ ☼ ☼ ● ●

Aunque no es el único ni el mejor, el algoritmo de **ramificación y acotamiento** ilustra bien los principios generales de los algoritmos de la programación entera (enumeración exhaustiva implícita; escasa eficiencia).

Programación Entera

La representación geométrica del espacio de soluciones factibles en un problema de dos variables (Fuente: Ming Zhao. 2019. Business Analytics. Disponible en línea. Licencia.



Programación Entera

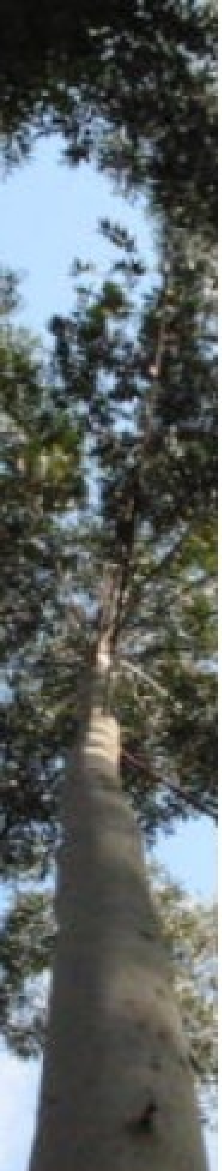
Un transportista ha suscripto un contrato para transportar chips de madera desde la playa de una industria hasta el puerto, donde serán embarcados hacia el extranjero. Para el cumplimiento del contrato estudia la posibilidad de asignar dos camiones con capacidades de carga y costos operativo diferentes. La industria le ha adjudicado una cuota mínima de chips a transportar de 3000 t, los que serán remunerados a razón de 8 $\$.t^{-1}$ de chips transportada desde su playa al puerto, el que se encuentra a una distancia de 6,25 km. Los excedentes que el contratista pueda entregar serán recibidos y retribuidos al mismo precio que la industria ofrece para la cuota asignada. Por otra parte, el contrato no establece una cuota máxima de chips a transportar para mejorar las posibilidades de que sus contratistas obtengan algún retorno económico. El contrato establece que el transportista dispondrá de 60 días para entregar la cuota asignada con el único requisito de informar su plan de tareas antes de iniciarlas, pues la industria tiene otros contratos de transporte para la carga del barco suscriptos con anterioridad y además piensa usar camiones propios en caso de ser necesario.

Programación Entera

El transportista acostumbra enviar sus camiones al taller para la realización de un *service* general cada 5000 km recorridos, para lo cual lleva un registro de la distancia que cada una de sus unidades ha recorrido. Esta información es crítica porque se estima que las unidades enviadas al *service* permanecerán inactivas un tiempo tal que dificultarían seriamente la posibilidad de cumplir el contrato una vez reincorporadas al trabajo. Habiendo considerado los tiempos de carga y descarga, junto con los turnos de sus choferes, ha estimado la cantidad de viajes diarios que cada uno de los camiones que asignará al cumplimiento del contrato pueden realizar y ha acordado que los camiones pueden pasar las horas fuera de servicio en la playa de estacionamiento de la industria. Toda la información relativa a los camiones se muestra en la siguiente tabla:

Camión	Capacidad de carga (t)	Costo operativo ($.km^{-1})	Viajes diarios (cargas.día^{-1})	Distancia recorrida* (km)
1	8	4.98	8	2806.25
2	12	7.40	5	1865.00

* Puestos en la playa de la industria



Programación Entera

El contratista necesita determinar el número de cargas que le asignará a cada camión para maximizar el ingreso neto (sin considerar costos fijos) del contrato, evitando que las unidades cumplan los 5000 km previstos para su mantenimiento durante los 60 días asignados.

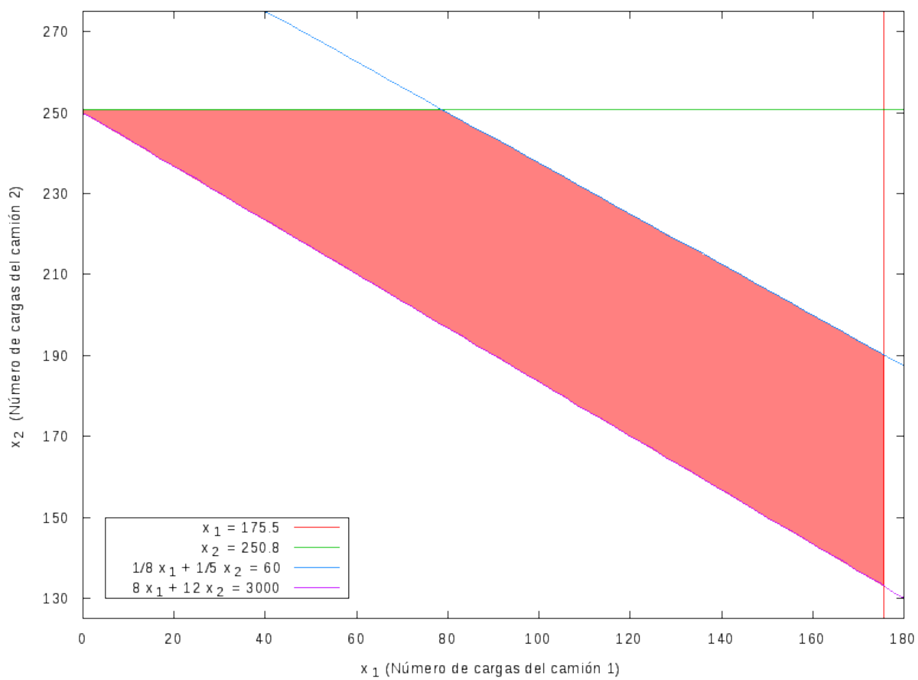
$$\text{Maximizar} \qquad z = 1{,}75\,x_1 + 3{,}50\,x_2$$

$$\text{Sujeto a} \qquad x_1 \leqslant 175{,}50\,;\; x_2 \leqslant 250{,}80$$

$$8\,x_1 + 12\,x_2 \geqslant 3000$$

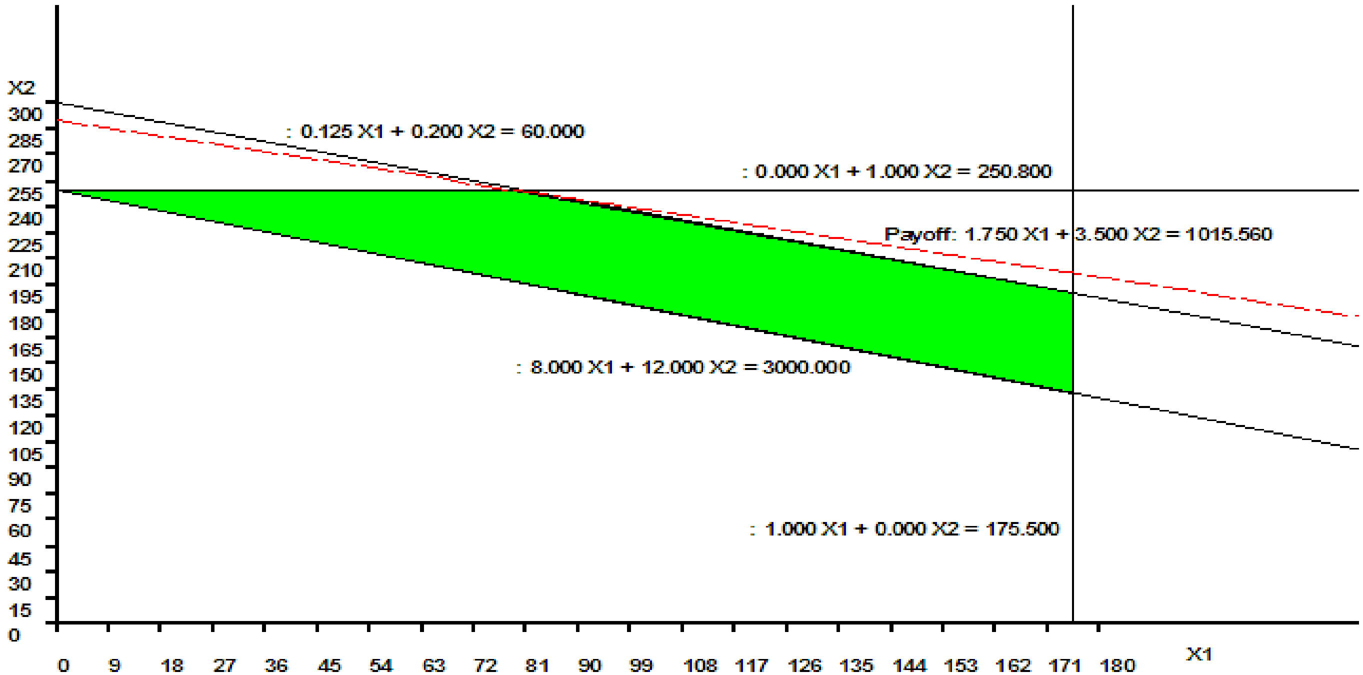
$$1/8\,x_1 + 1/5\,x_2 \leqslant 60$$

$$(x_j \in \mathbb{Z}) \geqslant 0$$



Programación Entera

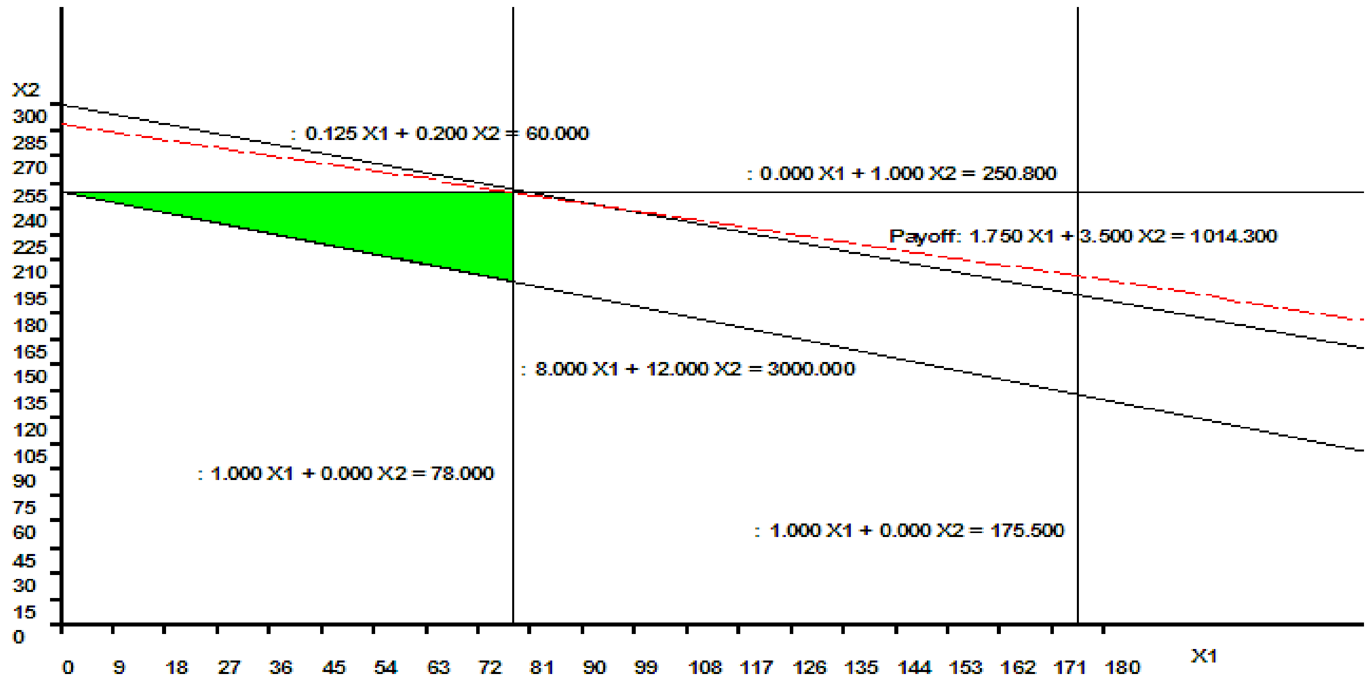
La solución óptima del problema relajado (Nodo 1).



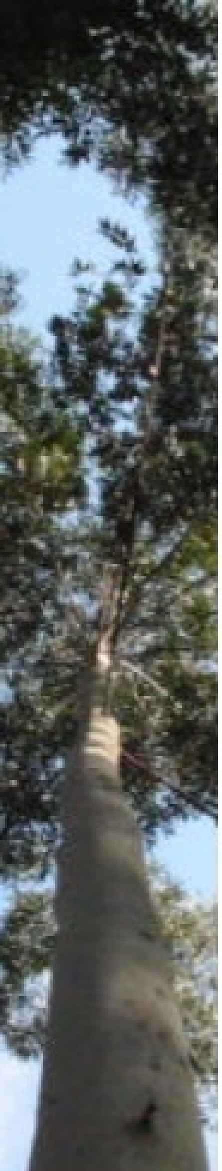
Optimal Decisions(X1,X2): (78.720, 250.800)
: 1.000X1 + 0.000X2 <= 175.500
: 0.000X1 + 1.000X2 <= 250.800
: 8.000X1 + 12.000X2 >= 3000.000
: 0.125X1 + 0.200X2 <= 60.000

Programación Entera

La solución óptima de la primera ramificación con la primera cota (Nodo 2).

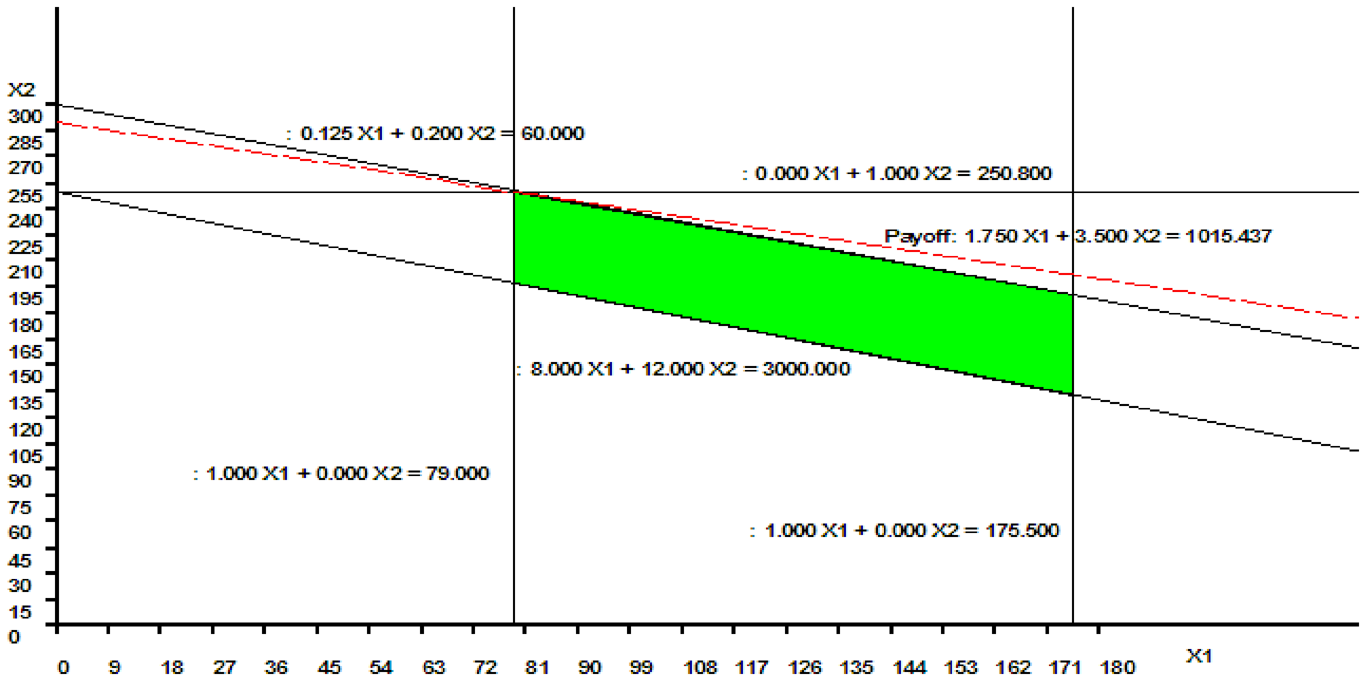


Optimal Decisions(X1,X2): (78.000, 250.800)
: 1.000X1 + 0.000X2 <= 175.500
: 0.000X1 + 1.000X2 <= 250.800
: 8.000X1 + 12.000X2 >= 3000.000
: 0.125X1 + 0.200X2 <= 60.000
: 1.000X1 + 0.000X2 <= 78.000



Programación Entera

La solución óptima de la primera ramificación con la segunda cota (Nodo 3).



Optimal Decisions(X1,X2): (79.000, 250.625)

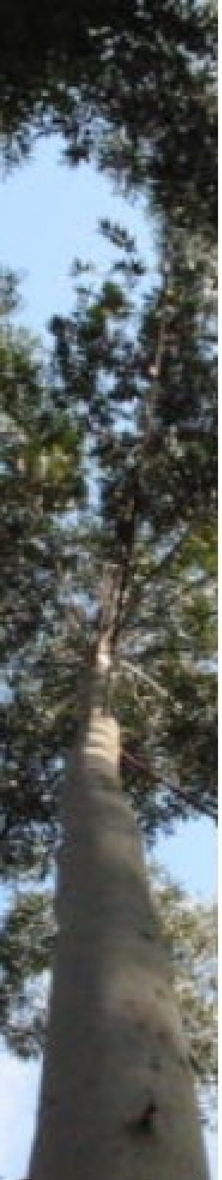
: 1.000X1 + 0.000X2 <= 175.500

: 0.000X1 + 1.000X2 <= 250.800

: 8.000X1 + 12.000X2 >= 3000.000

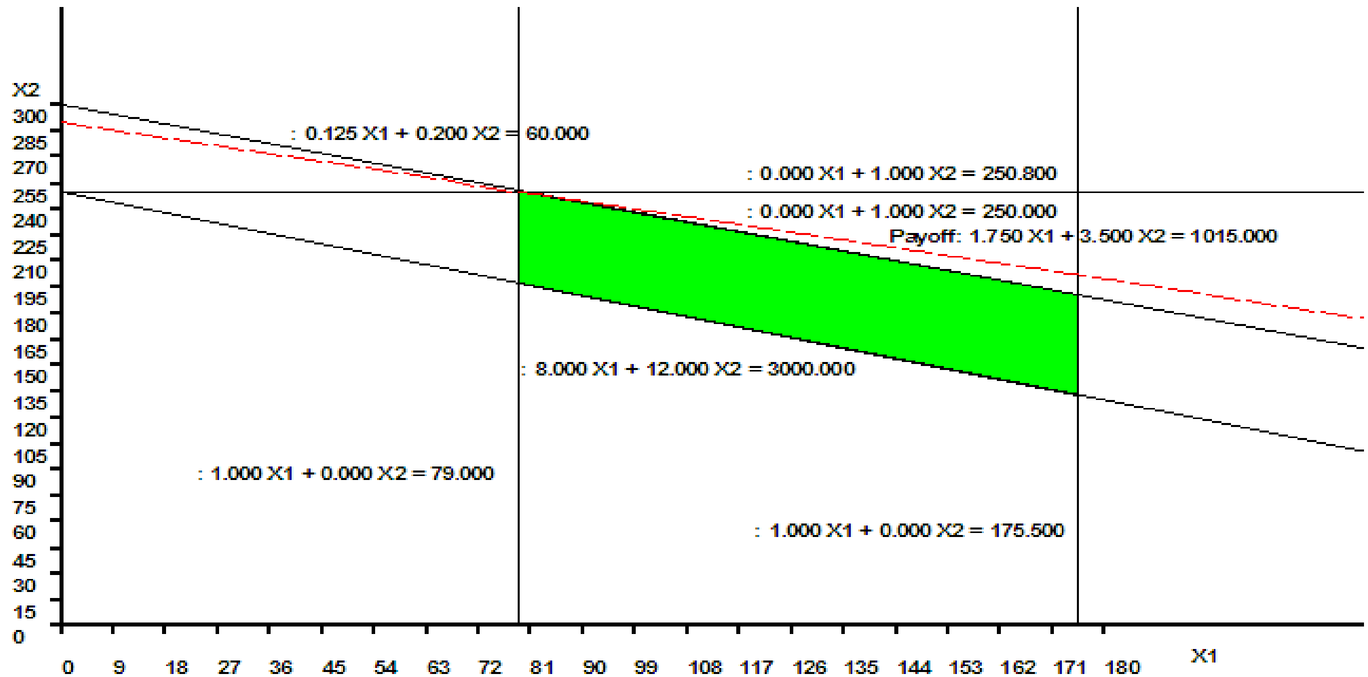
: 0.125X1 + 0.200X2 <= 60.000

: 1.000X1 + 0.000X2 >= 79.000



Programación Entera

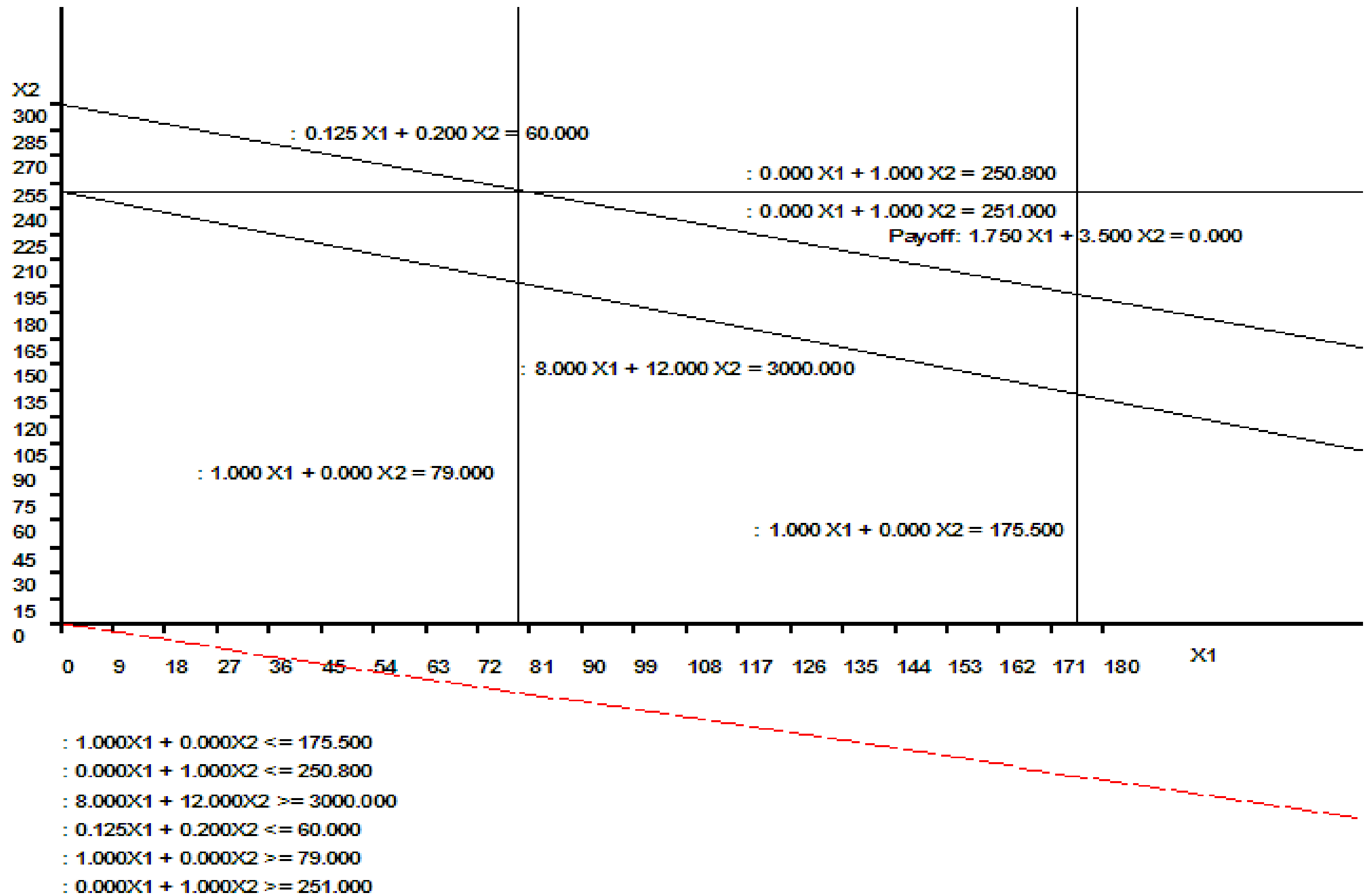
La solución óptima de la segunda ramificación con la primera cota (Nodo 4).



Optimal Decisions(X1,X2): (80.000, 250.000)
: 1.000X1 + 0.000X2 <= 175.500
: 0.000X1 + 1.000X2 <= 250.800
: 8.000X1 + 12.000X2 >= 3000.000
: 0.125X1 + 0.200X2 <= 60.000
: 1.000X1 + 0.000X2 >= 79.000
: 0.000X1 + 1.000X2 <= 250.000

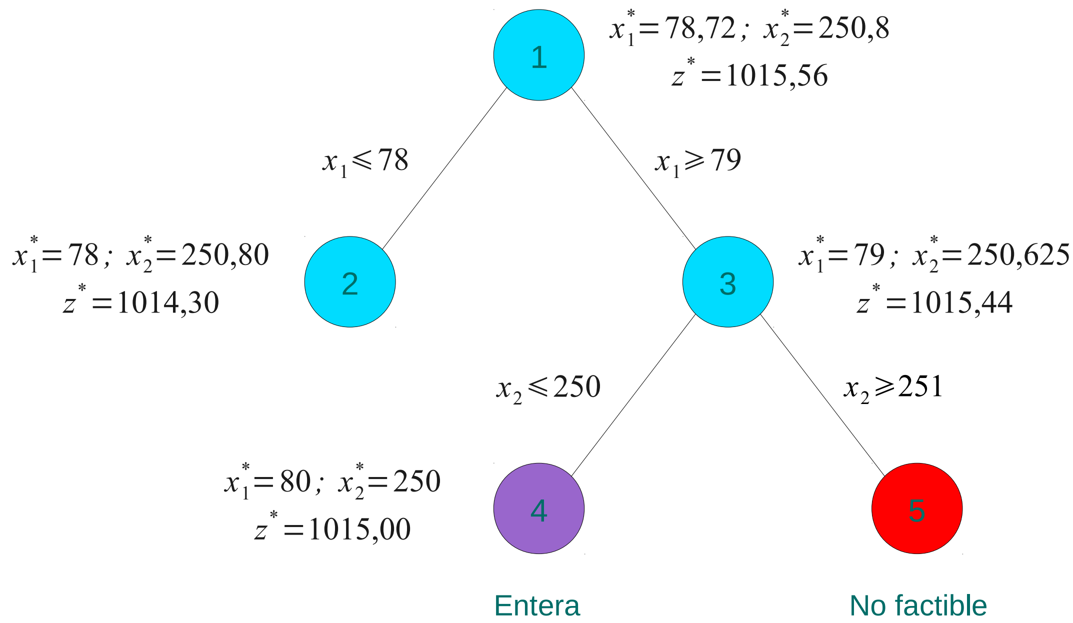
Programación Entera

La solución no factible de la segunda ramificación con la segunda cota (Nodo 5).



Programación Entera

El algoritmo de ramificación y acotamiento se puede representar mediante un diagrama de árbol que muestra el progreso en la búsqueda de la solución entera óptima:



Programación Binaria

En el aprovechamiento de un rodal, el volumen total de madera a arrastrar es de 5000 m^3 y se debe decidir cuanto será asignado a dos medios diferentes: bueyes y motoarrastradores. Todos los rollizos deben ser arrastrados desde el rodal hasta una playa de trozas en la que serán cargados en camiones y trasladados hasta la industria. Para operar con los bueyes se necesita preparar una playa de trozas que cuesta 600 \$, mientras que para los motoarrastradores la playa necesaria cuesta 1000 \$. Por otra parte, si se decide operar con los dos medios, la playa costaría 1600 \$. Los costos de arrastrar con bueyes se han estimado en 12 $\$.m^{-3}$ y los de hacerlo con motoarrastradores en 10 $\$.m^{-3}$. Si se desea minimizar el costo total de arrastrar la madera, incluyendo el costo de construir la playa de trozas, y se define a $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ como los volúmenes de madera a ser arrastrados por bueyes y motoarrastradores (en m^3), respectivamente, entonces la función objetivo se puede escribir como:

$$\text{Minimizar } z = 12\,x_1 + 10\,x_2 + \begin{cases} 600 & \text{si} \quad x_1 > 0 \wedge x_2 = 0 \\ 1000 & \text{si} \quad x_1 = 0 \wedge x_2 > 0 \\ 1600 & \text{si} \quad x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \end{cases}$$

Programación Binaria

Puesto que los costos fijos implican una violación del axioma de la proporcionalidad, para formular este problema como un programa lineal se pueden definir variables accesorias y restricciones accesorias:

$$y_1 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_1 = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x_1 > 0 \end{cases} \qquad\qquad y_2 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_2 = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x_2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = 12\,x_1 + 10\,x_2 + 600\,y_1 + 1000\,y_2 \\ \text{Sujeto a} & x_1 + x_2 = 5000 \\ & x_1 - 5000\,y_1 \leqslant 0 \\ & x_2 - 5000\,y_2 \leqslant 0 \\ & x_1 \geqslant 0\,;\, x_2 \geqslant 0\,;\, y_1 = \{0,1\}\,;\, y_2 = \{0,1\} \end{array}$$