La Dualidad y la Interpretación Económica del Método símplex

Pablo Yapura
Introducción a la Investigación de Operaciones
Junio del 2018

Introducción

La dualidad constituye un tópico de gran importancia para la programación lineal puesto que brinda las bases teóricas para comprender como cambia la solución óptima de un problema cualquiera cuando cambian las constantes del modelo matemático, lo que se conoce como análisis de sensibilidad o análisis post-óptimo. Todo problema de programación lineal tiene otro problema de programación lineal relacionado de manera especial. Al problema que se formula originalmente se lo conoce como primal, mientras que a su contraparte estrechamente relacionada se lo conoce como dual. Las relaciones son tales que cada uno es el dual del otro y encontrar la solución óptima de uno implica encontrar inmediatamente la solución óptima del otro.

Para introducir los conceptos más elementales de la dualidad se retomará el problema de la relación predador-presa cuya formulación original fue:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z = \quad & 6x_1 + 8x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 120 \\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 80 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Dándole una interpretación económica, este problema primal nos informa sobre niveles de producción óptimos para maximizar el valor de la función objetivo, sujeto a las limitaciones en los recursos especificadas en las restricciones, en este caso los tiempos de traslado y de captura. Por una variedad de razones sería deseable estimar el valor de cada uno de estos recursos, por ejemplo para decidir el tipo de cambios que se podría hacer si el predador decidiera disponer de recursos adicionales para mejorar su consumo calórico.

El valor o costo de cada recurso limitante está relacionado con los retornos que sea capaz de producir, en este ejemplo para producir calorías. Entonces, el valor de cada recurso depende de la magnitud de calorías que puede producir. Expresado económicamente, el valor marginal del producto de un recurso, es decir el valor adicional producido por la última unidad de recurso usado, es el precio que la firma estaría dispuesta a pagar por cantidades adicionales del recurso escaso. En otras palabras, es lo que anteriormente se ha identificado como el precio sombra.

El problema de encontrar estos precios resulta ser un problema de programación lineal que se denomina *problema dual*, dado un *problema primal* que es un problema de programación lineal. Para formular el problema dual se empezará definiendo los precios sombra o variables duales: sean $\boldsymbol{y_1}$ el valor del producto que se puede producir con una unidad de tiempo de traslado (en calorías.minuto^{-1}) e $\boldsymbol{y_2}$ el valor del producto que se puede producir con una unidad de tiempo de captura (en calorías.minuto^{-1}). El objetivo del problema dual es encontrar los precios sombras que *minimicen el costo total de adquirir* los tiempos de traslado y captura, es decir los recursos consumidos por la solución óptima. Si se simboliza a este costo total con $\boldsymbol{v}$ y se considera que el costo de adquirir cada uno de los recursos es igual al producto de la cantidad disponible por su correspondiente precio, se puede escribir como función objetivo:

$$\text{Minimizar } v = 120y_1 + 80y_2 \tag{2}$$

Si el predador quisiera *vender* la capacidad de sus recursos debería pedir precios para cada uno de ellos que al menos le retornen lo mismo que las dos actividades que los usan, o sea alimentarse con presas en los sitios 1 y 2. Por cada una de las presas con las que se alimenta en el sitio 1 obtiene una contribución de 6 calorías, necesita 2 minutos para trasladarse y 2 minutos para capturarla. En consecuencia, la *producción de una contribución mínima* de 6 calorías.presa^{-1} cuando se implementa esta actividad puede ser escrita como una restricción:

$$2y_1+2y_2\geqslant 6 \tag{3}$$

El análisis dimensional de esta inecuación indica que ambos coeficientes del lado izquierdo están expresados en minutos.presa^{-1}, mientras que ambos precios sombra están expresados en calorías.minuto^{-1}, por lo que a derecha e izquierda se tienen unidades coherentes (*i.e.* calorías.presa^{-1}). Con un razonamiento semejante, la actividad de traslado y captura de presas en el sitio 2 puede ser descripta con la restricción:

$$3y_1+y_2\geqslant 8 \tag{4}$$

Finalmente, y puesto que los precios se definen solamente para niveles positivos de consumo calórico, se tienen las típicas restricciones de no negatividad:

$$y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0 \tag{5}$$

El problema de programación lineal constituido con las ecuaciones (2) a (5) es el que encontrará los precios duales de los recursos limitantes del problema primal definido en (1). Para analizar las relaciones especiales entre ambos tipos de problemas, se los presenta completamente en la siguiente tabla:

Problema primal: asignación de recursos	Problema dual: valoración de recursos
$6x_1 + 8x_2 = z$ (max)	$120y_1 + 80y_2 = v$ (min)
$2x_1 + 3x_2 \leq 120$	$2y_1 + 2y_2 \geq 6$
$2x_1 + x_2 \leq 80$	$3y_1 + y_2 \geq 8$
$x_1, x_2 \geq 0$	$y_1, y_2 \geq 0$

En esta comparación se puede observar que el *problema primal* busca *maximizar* la función objetivo sujeto a restricciones del tipo *menor o igual*, mientras que el *problema dual* busca *minimizar* la función objetivo sujeta a restricciones del tipo *mayor o igual*, o sea de sentido contrario. Además, los *coeficientes* de la función objetivo del problema dual (*i.e.* 120 y 80) son los *parámetros* del problema primal y los *parámetros* del problema dual son los *coeficientes* de la función objetivo del problema primal (*i.e.* 6 y 8). También se observa que el problema dual tiene *una variable asociada* (*i.e.* $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y_2}$) para *cada una de las restricciones* del problema primal (tiempo de traslado, tiempo de captura) y una *restricción asociada* (contribución de las actividades) para cada *variable primal* del problema (*i.e.* $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$). Estas observaciones podrían usarse para enunciar las reglas de construcción de un problema dual a partir de un primal estándar.

Formulaciones estándar

Las relaciones presentadas son absolutamente simétricas, es decir que están definidas de tal manera que si se aplican las reglas de la dualidad a un problema dual lo que se obtiene es su problema primal. Esto permite afirmar que el problema dual de un problema dual es su problema primal y es la razón por la cual no es muy importante cual de los dos problemas se identifica como primal. Si se adopta como formulación estándar para el problema primal:

$$\begin{aligned} &\underset{[x_j]}{\text{Maximizar}}\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\text{sujeto a}: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \left(i=1,\ 2,\ \ldots,m\right) \\ &\qquad\qquad x_j \geqslant 0 \left(j=1,\ 2,\ \ldots,n\right) \end{aligned} \tag{6}$$

se tiene para el problema dual la siguiente formulación estándar:

$$\begin{aligned} &\underset{[y_i]}{\text{Minimizar}}\ v=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ &\text{sujeto a}: \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j \left(j=1,\ 2,\ \ldots,n\right) \\ &\qquad\qquad y_i \geqslant 0 \left(i=1,\ 2,\ \ldots,m\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Si usamos la notación matricial, lo mismo se podría formular más compactamente:

- Problema primal: encontrar max $\boldsymbol{z}$ tal que $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \boldsymbol{z}$ ($\mathbf{A}$: $\boldsymbol{m}$ x $\boldsymbol{n}$)
- Problema dual: encontrar min $\boldsymbol{v}$ tal que $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \boldsymbol{v}$ ($\mathbf{A}$: $\boldsymbol{m}$ x $\boldsymbol{n}$)

en la que $\boldsymbol{z}$ y $\boldsymbol{v}$ son escalares que representan el valor de las funciones objetivos primal y dual, respectivamente, $\mathbf{A}$ es la matriz de los coeficientes de las restricciones, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son vectores columna que simbolizan a las variables primal y dual, respectivamente, $\mathbf{c}$ es el vector columna de los coeficientes de la función objetivo primal, $\mathbf{b}$ es el vector columna de los parámetros primales, $\boldsymbol{m}$ es el número de restricciones primales (filas) y $\boldsymbol{n}$ es el número de variables primales (columnas).

Formulaciones no estandarizadas

Si el problema primal está formulado con una función objetivo que se busca minimizar y en sus restricciones aparecen ecuaciones o inecuaciones del tipo mayor o igual, *i.e.* no está formulado de manera estándar, las reglas de formulación del problema dual requieren ciertas consideraciones especiales.

La formulación dual de un problema primal no estandarizado puede ser hecha de dos maneras distintas. La primera es operar algebraicamente sobre el problema primal para convertirlo en un problema estándar. Para ello se debe recordar que minimizar una función objetivo en z es equivalente a maximizar su opuesto (*i.e.* minimizar $\boldsymbol{z}$ ≡ maximizar -$\boldsymbol{z}$), que una restricción mayor o igual puede ser invertida multiplicándola por -1 y que una ecuación puede ser reemplazada con dos inecuaciones de sentido contrario con idéntico parámetro, debiéndose luego multiplicar la del tipo mayor o igual por -1. Por ejemplo, para una variante del problema del predador-presa que ahora se tendrá como problema primal:

$$\begin{aligned}\text{Minimizar } z= & \; 2x_1+x_2\\ \text{sujeto a}: & \; 2x_1+3x_2\leqslant 120\\ & \; 6x_1+8x_2\geqslant 240\\ & \; 3x_1+2x_2=90\\ & \; x_1\geqslant 0,\; x_2\geqslant 0\end{aligned} \tag{8}$$

Para ponerlo en formato estándar, primero es necesario multiplicar la función objetivo por -1 para obtener un problema de maximización:

$$\text{Maximizar } -z=-2x_1-x_2$$

Luego es necesario operar sobre las últimas dos restricciones para convertirlas en inecuaciones del tipo menor o igual. Para convertir la segunda simplemente se la multiplica por -1:

$$-6x_1-8x_2\leqslant -240$$

Mientras que la tercera debe ser reemplazada por dos inecuaciones, en una primera etapa

$$\begin{aligned}&3x_1+2x_2\leqslant 90\\&3x_1+2x_2\geqslant 90\end{aligned}$$

Para luego multiplicar la segunda de las nuevas inecuaciones por -1 y así obtener

$$\begin{aligned}&3x_1+2x_2\leqslant 90\\&3x_1+2x_2\leqslant -90\end{aligned}$$

Entonces el problema primal originalmente no estandarizado puede ser escrito como uno estándar equivalente:

$$\begin{aligned}\text{Maximizar } -z= & \; -2x_1-x_2\\ \text{sujeto a}: & \; 2x_1+3x_2\leqslant 120\\ & -6x_1-8x_2\leqslant -240\\ & \; 3x_1+2x_2\leqslant 90\\ & -3x_1-2x_2\leqslant -90\\ & \; x_1\geqslant 0,\; x_2\geqslant 0\end{aligned} \tag{9}$$

Y una vez puesto en formato estándar, se pueden aplicar las relaciones definidas para obtener su problema dual:

$$\begin{aligned}\text{Minimizar } v= & \; 120y_1-240y'_2+90y'_3-90y''_3\\ \text{sujeto a}: & \; 2y_1-6y'_2+3y'_3-3y''_3\geqslant -2\\ & \; 3y_1-8y'_2+2y'_3-2y''_3\geqslant -1\\ & \; y_1\geqslant 0,\; y'_2\geqslant 0,\; y'_3\geqslant 0,\; y''_3\geqslant 0\end{aligned} \tag{10}$$

Puesto que los coeficientes de las últimas dos variables duales sólo difieren en signo en toda la formulación, se han identificado con el mismo subíndice (3); y dado que los signos de la segunda variable dual fueron causados por la inversión del sentido de la desigualdad, se la ha notado con el signo prima ('). Si se considera que la diferencia entre *dos variables no negativas* resulta en otra variable que puede tener cualquier signo, siempre que se impida que ambas sean *estrictamente positivas* simultáneamente, se puede concebir $y'_3 - y''_3 = y_3$, en la que $\boldsymbol{y_3}$ es una variable irrestricta. De manera análoga, si en la diferencia entre *dos variables no negativas* se anula la primera de ellas, entonces la variable resultante será una *variable no positiva*. Por ejemplo, si en $y'_2 - y''_2 = y_2$ se tiene que $y'_2 = 0$, entonces $-y''_2 = y_2 \leqslant 0$, lo que permite que $y''_2 \geq 0$, i.e. una variable no negativa, sea usada para reemplazar a una variable no positiva. Con estas sustituciones, el problema dual se puede escribir:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } v = \quad & 120\, y_1 + 240\, y_2 + 90\, y_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & 2\, y_1 + 6\, y_2 + 3\, y_3 \geqslant -2 \\ & 3\, y_1 + 8\, y_2 + 2\, y_3 \geqslant -1 \\ & y_1 \geqslant 0,\ y_2 \leqslant 0,\ y_3 \text{ irrestricta} \end{aligned} \tag{11}$$

Con lo que queda más claro que la formulación dual tiene tantas variables como restricciones tiene el primal, en este caso tres. De cualquier manera, si se quiere resolver el problema dual usando el método símplex sólo se puede usar el problema dado por la ecuación (10), puesto que el mismo está formulado exclusivamente con variables no negativas.

Si se generalizan todas estas observaciones, hay una forma más simple de desarrollar problemas duales que no requiere nada en particular acerca del problema primal. Simplemente se debe concebir a cualquiera de ambos problemas como compuesto por un conjunto de variables con sus restricciones de signo y por un conjunto de restricciones tales que las *variables del primal* tienen una *correspondencia biunívoca* con las *ecuaciones e inecuaciones del dual* y tales que *las ecuaciones e inecuaciones del primal* tienen *correspondencia biunívoca* con las *variables del dual*. Para obtener la formulación dual se presentan todas las reglas en la siguiente tabla, desarrollada por Dantzig & Thapa (1997), a la que se debe entrar por la columna que corresponda al sentido de la optimización del problema que se haya seleccionado como primal (*i.e.* si el problema primal es de minimización se debe entrar por la segunda columna):

Problema primal	**Problema dual**
Maximizar objetivo primal	Minimizar objetivo dual
Coeficientes de la función objetivo primal	Parámetros del problema dual
Parámetros del problema primal	Coeficientes de la función objetivo dual
Matriz de coeficientes de las restricciones	Matriz traspuesta de los coeficientes
Relación primal *i*-ésima inecuación: ≤ *i*-ésima inecuación: ≥ *i*-ésima ecuación: =	Variable dual $y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ y_i irrestricta
Variable primal $x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ x_j irrestricta	Relación dual *j*-ésima inecuación: ≥ *j*-ésima inecuación: ≤ *j*-ésima ecuación: =

Para ejemplificar la aplicación de estas reglas se puede retomar el problema de la ecuación (8), que no está formulado de manera estándar y se lo presenta en una única tabla junto con su problema dual. En esta tabla el *problema primal* se escribe (y lee) horizontalmente de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, para lo cual se identifica en cada columna el nombre de una variable primal y se anota su restricción de signo (en este ejemplo $\boldsymbol{x_1} \geq 0$ y $\boldsymbol{x_2} \geq 0$), anotando en el cuerpo de la tabla los coeficientes de cada restricción primal (2 y 3 en la primera fila, 6 y 8 en la segunda y 3 y 2 en la tercera).

En la *columna Relación* se anotan los símbolos que identifican a las inecuaciones y ecuaciones primales (≤ en la primera fila, ≥ en la segunda e = en la tercera). En la *columna Constante* se anotan los parámetros primales (120 en la primera fila, 240 en la segunda y 90 en la tercera). Para completar el primal, en la *fila Constante* (al final de la tabla) se anotan los coeficientes de la función objetivo primal (2 y 1) y al lado se indica el sentido de la optimización: Min $\boldsymbol{z}$.

Luego el *problema dual* se escribe (y lee), también de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, pero verticalmente, para lo cual se identifica en cada fila el nombre de la variable dual asociada a esa restricción primal y se anota la restricción de signo consultando la tabla anterior. Para ello, se tiene en cuenta el sentido de la optimización del primal -en este caso minimizar- para entrar en la tabla anterior por la segunda columna, llamada Problema dual, y donde dice Relación dual leer en la primer columna las restricciones de signo para las variables duales. En este ejemplo, a la inecuación ≤ de la primera fila le corresponde una variable dual no positiva, *i.e.* $\boldsymbol{y_1} \leq 0$; a la inecuación ≥ de la segunda fila le corresponde una variable dual no negativa, *i.e.* $\boldsymbol{y_2} \geq 0$; mientras que a la ecuación de la tercera fila le corresponde una variable dual irrestricta, *i.e.* $\boldsymbol{y_3}$ irrestricta). Para completar, en la *fila Relación* se debe anotar el símbolo de las ecuaciones e inecuaciones del problema dual, para lo cual se vuelve a consultar la tabla anterior entrando por la segunda columna, donde dice Variable dual, para leer en la primer columna el tipo correspondiente. En este ejemplo y dado que $\boldsymbol{x_1} \geq 0$ y $\boldsymbol{x_2} \geq 0$ corresponde anotar dos inecuaciones del tipo ≤. Finalmente, debajo de la *columna Constante* ya completada se anota el sentido de la optimización del problema dual: Max $\boldsymbol{v}$.

	Primal				
Dual	Variable	$\boldsymbol{x_1} \geq 0$	$\boldsymbol{x_2} \geq 0$	Relación	Constante
	$\boldsymbol{y_1} \leq 0$	2	3	≤	120
	$\boldsymbol{y_2} \geq 0$	6	8	≥	240
	$\boldsymbol{y_3}$ irrestricta	3	2	=	90
	Relación	≤	≤		Max $\boldsymbol{v}$
	Constante	2	1	Min $\boldsymbol{z}$	

Para mayor claridad, el problema dual en formato no estandarizado del problema dual no estandarizado queda:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } v = & \ 120y_1 + 240y_2 + 90y_3 \\ \text{sujeto a: } & \ 2y_1 + 6y_2 + 3y_3 \leqslant 2 \\ & \ 3y_1 + 8y_2 + 2y_3 \leqslant 1 \\ & \ y_1 \leqslant 0,\ y_2 \geqslant 0,\ y_3 \text{ irrestricta} \end{aligned} \tag{12}$$

Si se recuerda que el problema primal corresponde exactamente al descripto en la ecuación (8), quizás resulte conveniente comparar las formulaciones algebraicas implícitas en la última tabla con sus equivalentes estandarizados de las ecuaciones (9) y (10). Así tal vez se puede ver que la tabla presenta todo de manera *más compacta* y, en muchos casos, *más naturalmente*.

Primal no estándar (Ecuación (8))	Dual no estándar (Ecuación (12))
$\begin{aligned} \text{Minimizar } z = & \ 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a: } & \ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 120 \\ & \ 6x_1 + 8x_2 \geqslant 240 \\ & \ 3x_1 + 2x_2 = 90 \\ & \ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Maximizar } v = & \ 120y_1 + 240y_2 + 90y_3 \\ \text{sujeto a: } & \ 2y_1 + 6y_2 + 3y_3 \leqslant 2 \\ & \ 3y_1 + 8y_2 + 2y_3 \leqslant 1 \\ & \ y_1 \leqslant 0,\ y_2 \geqslant 0,\ y_3 \text{ irrestricta} \end{aligned}$

Primal estándar (Ecuación (9))	Dual estándar (Ecuación (10))
Maximizar $-z=-2x_1-x_2$	
sujeto a: $2x_1+3x_2\leqslant 120$	Minimizar $v=120y_1-240y'_2+90y'_3-90y''_3$
$-6x_1-8x_2\leqslant -240$	sujeto a: $2y_1-6y'_2+3y'_3-3y''_3\geqslant -2$
$3x_1+2x_2\leqslant 90$	$3y_1-8y'_2+2y'_3-2y''_3\geqslant -1$
$-3x_1-2x_2\leqslant -90$	$y_1\geqslant 0,\ y'_2\geqslant 0,\ y'_3\geqslant 0,\ y''_3\geqslant 0$
$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$	

De todas formas, para resolver un problema como el de la ecuación (12) con el método símplex es necesario reemplazar sus variables no positivas e irrestrictas por variables no negativas, como ya se vio anteriormente. Justamente, operando sobre la ecuación (10) se obtuvo la ecuación (11), la cual no se encuentra en formato estándar y es directamente comparable con la ecuación (12); de hecho son formulaciones equivalentes (*i.e.* con el mismo conjunto solución). Esto es fácilmente comprobable si se desarrolla a partir de la ecuación (12) una versión construida exclusivamente con variables no negativas, es decir una formulación directamente comparable y equivalente con la dada por la ecuación (10) y que además se puede resolver con el símplex y queda:

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar } v &= -120y''_1+240y_2+90y'_3-90y''_3\\
\text{sujeto a: } & -2y''_1+6y_2+3y'_3-3y''_3\leqslant 2\\
& -3y''_1+8y_2+2y'_3-2y''_3\leqslant 1\\
& y''_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0,\ y'_3\geqslant 0,\ y''_3\geqslant 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Si se observa con atención, las dos formulaciones de las ecuaciones (10) y (13) tienen las *variables vicarias* de las no positivas en distintas columnas, además de que el sentido de sus optimizaciones es opuesto. Sin embargo, ambas pueden ser llevadas al símplex para comprobar que presentan la misma solución.

Relaciones primal/dual y factibilidad

No todos los pares de problemas tienen solución factible, de modo que las cuatro combinaciones son posibles:

1. Tanto el problema primal como el dual son factibles. Entonces Max $\boldsymbol{z}$ = Min $\boldsymbol{v}$
2. El problema primal es factible pero el dual no es factible. Entonces Max $\boldsymbol{z} \longrightarrow +\infty$
3. El problema primal no es factible pero el dual es factible. Entonces Min $\boldsymbol{v} \longrightarrow -\infty$
4. Tanto el problema primal como el dual no son factibles

Teoremas

Se han postulado y demostrado varias versiones del teorema de la dualidad, las que resultan ser una expresión que describe el rango de valores posibles para las soluciones objetivos de los problemas primales y duales, en particular para el interesante caso en que ambos presentan soluciones factibles. Aquí simplemente se darán sin pruebas dos versiones:

Teorema de la dualidad débil: sea x_j° cualquier solución factible del problema primal dado en la ecuación (6) e y_i° cualquier solución factible de su problema dual dado en la ecuación (7), entonces

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{\circ}=z^{\circ}\leqslant v^{\circ}=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^{\circ} \tag{14}$$

Corolario: cualquier solución factible del problema dual provee una cota superior para los valores de la función objetivo del primal que se puedan obtener con soluciones factibles. Simétricamente, cualquier solución factible del primal provee una cota inferior para los valores de la función objetivo del dual que se puedan obtener con soluciones factibles.

Teorema de la dualidad estricta: si el problema primal dado por la ecuación (6) tiene solución factible y su problema dual dado por la ecuación (7) tiene solución factible, entonces existen soluciones factibles óptimas para el primal $x_j^{\circ}=x_j^*$ y el dual $y_i^{\circ}=y_i^*$, tales que

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = z^* = v^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \qquad (15)$$

Por último, una importante propiedad de los sistemas primales y sus duales es conocida como holgura complementaria y se ha postulado un teorema que la describe:

Teorema de la holgura complementaria: para soluciones factibles óptimas del problema primal de la ecuación (6) y su dual de la ecuación (7), toda vez que una relación de cualquiera de ellos tiene holgura, su variable dual asociada es nula; si una variable de cualquier sistema es positiva, la relación asociada en su dual está estrictamente satisfecha.

Bibliografía

Dantzig GB & MN Thapa. 1997. Linear programming 1: Introduction. Springer-Verlag, New York. Chapter 5: 129-143.