Introducción a la Investigación de Operaciones

Unidad didáctica 2: Programación lineal

- **Alcance:** en esta unidad didáctica se introducirá el uso de modelos matemáticos como mecanismo de representación y solución para varios tipos de problemas de decisión. Por la importancia central que se le asigna en la asignatura, el problema de la programación lineal será abordado con detenimiento.
- **Contenidos:** el problema de la programación lineal. Variables de decisión, función objetivo, restricciones y soluciones. Formalización matemática. Axiomas. Solución gráfica, analítica y algorítmica. Formulación y resolución del problema en planillas de cálculo. El método simplex, su interpretación económica y el análisis de sensibilidad. Formulación y resolución del problema con el lenguaje de modelado algebraico MathProg y GLPK. Problemas prototípicos de programación lineal (e.g. mezcla de productos, de la dieta, planificación de horarios, producción e inventario, cadena de abastecimiento, cartera de inversión, análisis de la envolvente de datos).

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
Universidad Nacional de La Plata
La Plata – Abril del 2020 – Pablo Yapura

Una cita textual

Si se me pidiera sintetizar mis contribuciones tempranas y quizás más importantes a la programación lineal, diría que fueron tres:

1. Reconocer (como resultado de mis años como planificador de programas prácticos durante la guerra) que la mayoría de las relaciones de planificación podían reformularse como un sistema de desigualdades lineales.
2. Reemplazar las reglas prácticas para seleccionar buenos planes por funciones objetivo generales (típicamente, las reglas prácticas son expresiones de aquellos con autoridad acerca de los medios para cumplir el objetivo y no el objetivo en sí mismo).
3. Inventar el Método Simplex que transformó el modelo relativamente poco sofisticado de programación lineal para expresar teoría económica en una potente herramienta para la planificación práctica de grandes sistemas complejos.

George Dantzig (1997).

La Programación matemática

Programación matemática (o teoría de la optimización) es la rama de las matemáticas que estudia las técnicas para maximizar o minimizar una función objetivo cuyas variables están sujetas a restricciones lineales, no lineales y enteras (Dantzig & Thapa, 1997).

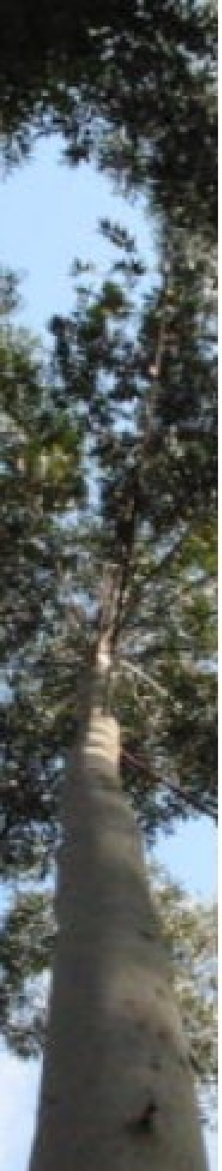
La *programación lineal*, como caso especial de la programación matemática, se ocupa de la maximización o minimización de una función objetivo de tipo lineal en la que sus variables están sujetas a restricciones lineales de igualdad y desigualdad (Dantzig & Thapa, 1997).

Otras extensiones de la programación matemática incluyen la *programación entera*, la *programación multiobjetivos* (o *multicriterio*), la *programación no lineal*, la *programación probabilística* (o *estocástica*) y los *modelos de redes* (*CPM/PERT*).

Una aplicación ecológica de la programación lineal: el modelo predador-presa

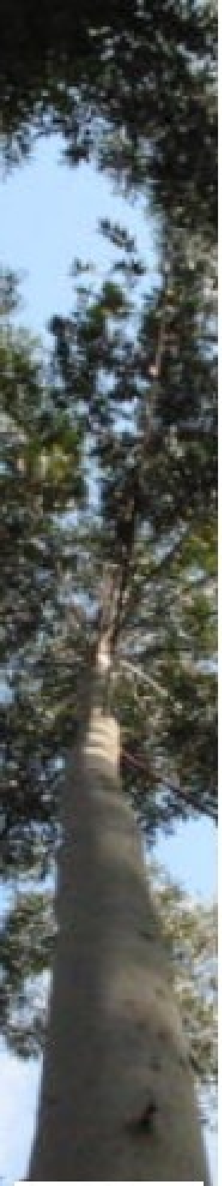
- Un cierto predador tiene dos fuentes potenciales de alimento, las que se encuentran en los **sitios 1** y **2**, respectivamente. El **tiempo** que necesita el predador para **trasladarse** desde su guarida hasta cada sitio y retornar con una unidad de alimento se ha estimado en 2 minutos para el **sitio 1** y en 3 minutos para el **sitio 2**. En el **sitio 1**, el predador tarda un promedio de 2 minutos en **capturar** una unidad de alimento, mientras que en el sitio **2**, solo le toma 1 minuto capturar la correspondiente unidad.
- El predador no puede disponer de más de 120 minutos diarios para trasladarse de su refugio a los sitios de alimentación, ni invertir más de 80 minutos por día en la captura de sus presas.
- El **valor alimenticio** de cada unidad de alimento del sitio 1 promedia 6 calorías y el correspondiente a cada unidad del sitio 2 alcanza 8 calorías.

Componentes de un problema



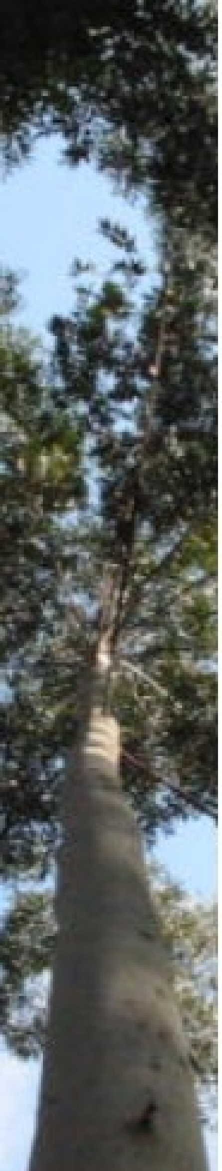
Los componentes

- Las **actividades** podrían ser alimentarse con presas de los dos sitios. Las **variables de decisión** correspondientes podrían ser $\boldsymbol{x_1}$, la cantidad de presas del **sitio 1** en la dieta y $\boldsymbol{x_2}$, la cantidad de presas del **sitio 2** en la dieta. Se las suele simbolizar conjuntamente como $\boldsymbol{x_j}$, la cantidad de presas del sitio $\boldsymbol{j}$. A cualquier valor asociado a una variable de decisión, *e.g.* $\boldsymbol{x_2} = 18$ presas, se le llama **nivel de actividad**.
- Una lista de todas las variables de decisión con sus correspondientes niveles es lo que se denominará una **solución**.
- Por ejemplo, $\boldsymbol{x_1} = 10$ presas y $\boldsymbol{x_2} = 22$ presas es una solución, mientras que $\boldsymbol{x_1} = 25$ presas y $\boldsymbol{x_2} = 0$ presas es una solución diferente e igualmente legítima.



Los componentes

- El **objetivo** podría ser maximizar el valor alimenticio de la dieta y el **criterio de decisión** expresarse en calorías. Esto significa que una cierta dieta de 35 calorías es mejor que otra que entrega 28 calorías.
- La **contribución calórica** de cada presa del **sitio 1** es de **6 calorías/presa**, mientras que la del otro sitio es de **8 calorías/presa**. Si se multiplican estas contribuciones unitarias por presa por las cantidades de presas lo que se obtiene son las contribuciones calóricas de las actividades correspondientes. Por ejemplo, si x_2 = 10 presas, entonces 8 [calorías /presa] * x_2 [presas] = 8 * 10 = 80 [calorías].



Los componentes

- Si se suman las contribuciones de todas las actividades lo que se tiene es una expresión matemática del objetivo a la que se denomina **función objetivo** y se la suele simbolizar como $\boldsymbol{z = f(x_j)}$. En este caso sería $\mathbf{z = 6x_1 + 8x_2}$ y las unidades de **z** quedarían expresadas en calorías.
- Dada una solución como $\boldsymbol{x_1}$ = 10 presas y $\boldsymbol{x_2}$ = 22 presas, entonces es fácil determinar que z = 6*10 + 8*22 = 236 [calorías]. Si $\boldsymbol{x_1}$ = 25 presas y $\boldsymbol{x_2}$ = 0 presas, entonces z = 150 [calorías] y se puede afirmar que es una solución peor que la anterior.
- Es usual denominar a las constantes como 6 y 8, las contribuciones unitarias, como **coeficientes de la función objetivo**. También son conocidos como **coeficientes de costos**.

Los componentes

- Razonando análogamente se pueden desarrollar las **restricciones**. Cada presa del sitio 1 consume 2 minutos de **tiempo de traslado** y si se multiplica este consumo unitario por la cantidad de presas, es decir $2*x_1$, se tendrá el consumo total de esta actividad. El consumo total de la otra actividad resultará del producto de su respectivo consumo por la cantidad de presas, es decir $3*x_2$. El análisis dimensional en ambos casos resultaría ser [minutos/presa]*[presas] = [minutos]
- Luego el tiempo de traslado total consumido por una dieta cualquiera se obtiene sumando los consumos de todas las actividades. La función resultantes sería $2x_1 + 3x_2$ y su resultado expresado en minutos. Dada una solución como x_1 = 10 presas y x_2 = 22 presas, entonces es fácil determinar que se consumen 2*10 + 3*22 = 86 [minutos].

Los componentes

- El valor de esa función de consumo debe compararse con el tiempo de traslado disponible, que era de 120 minutos. Claramente, consumir 86 minutos es posible si se tienen 120 minutos disponibles.
- La expresión general se escribe $\boldsymbol{2x_1 + 3x_2 \leq 120}$ y se puede constatar la coherencia de unidades a ambos lados de la desigualdad [minutos] + [minutos] consumidos, menor o igual a [minutos] disponibles.
- Se dirá entonces que una solución es **factible para esa restricción** si se cumple (o no se viola) la desigualdad.
- A las constantes como 2 y 3 se las denomina **coeficientes tecnológicos**, **coeficientes del lado izquierdo** (de la inecuación) y también como **coeficientes de la matriz de restricciones**.
- A las constantes como 120 se las denomina **parámetros del lado derecho** (de la inecuación) o simplemente **lado derecho**.

Los componentes

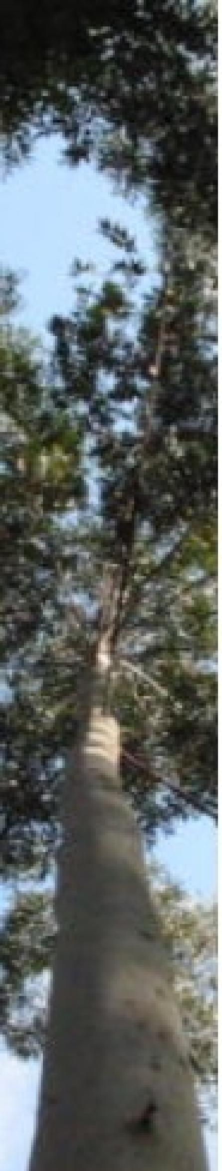
- La expresión general del tiempo de captura se escribe $\boldsymbol{2x_1 + x_2 \leq 80}$ y también se puede constatar la coherencia de unidades a ambos lados de la desigualdad [minutos] + [minutos] consumidos, menor o igual a [minutos] disponibles.
- Volviendo a la solución $\boldsymbol{x_1}$ = 10 y $\boldsymbol{x_2}$ = 22, entonces es fácil determinar que se consumen 2*10 + 1*22 = 42 [minutos], que también resulta **factible para esta restricción** porque no viola la desigualdad.
- No tiene sentido pensar en valores negativos para las variables de decisión, lo cual se denota como $\boldsymbol{x_j \geq 0}$, para todo $\boldsymbol{j}$. Estas restricciones especiales son generales en la PL y se dan por supuestas si no se escriben. Se la conoce como la condición o restricción de **no-negatividad** de las variables.
- Como $\boldsymbol{x_1}$ = 10 y $\boldsymbol{x_2}$ = 22 son factibles para todas las restricciones, incluyendo las de no-negatividad, entonces es una **solución factible para el problema**.

El modelo matemático

- Si el predador debe maximizar el valor calórico de su dieta en el limitado tiempo disponible, entonces su problema es un problema de programación lineal que se puede expresar de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{llcrl}
\text{Maximizar} & 6x_1 + 8x_2 & = & z & (\text{valor calórico}) \\
\text{Sujeto a} & 2x_1 + 3x_2 & \leqslant & 120 & (\text{tiempo de traslado}) \\
 & 2x_1 + x_2 & \leqslant & 80 & (\text{tiempo de captura}) \\
 & x_1, x_2 & \geqslant & 0 &
\end{array}
$$

- Dónde z simboliza el valor calórico y x_1 y x_2 representan el número de presas de los sitios 1 y 2, respectivamente, con los que se compone la dieta del predador.



El modelo predador-presa en tablas

Producto	Tiempo de traslado	Tiempo de captura	Valor alimenticio
Presas del Sitio 1	2	2	6
Presas del Sitio 2	3	1	8
Disponibilidad	120	80	---

El problema de la mezcla de presas del predador

	Sitio 1	Sitio 2			
Contribución calórica	6	8			
	Minutos por unidad de presa		Minutos empleados		Minutos disponibles
Tiempo de traslado	2	3	86	<=	120
Tiempo de captura	2	1	42	<=	80
	Sitio 1	Sitio 2			Calorias totales
Cantidad de presas	10	22			236

Interpretación geométrica

$$z=6x_1+8x_2$$
$$z=120$$
$$x_2=-6/8\,x_1+120/8$$

x_1	x_2
0	15,00
5	11,25
10	7,50
15	3,75
20	0,00

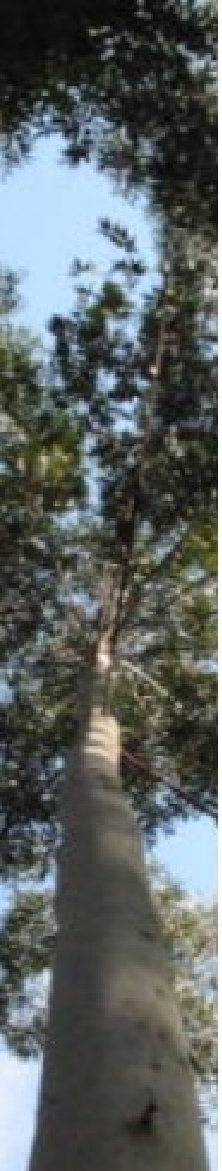
$$z=6x_1+8x_2$$
$$x_2=-6/8\,x_1+1/8\,z$$
$$y=x_2;\quad x=x_1;\quad m_o=-6/8;\quad b_o=z/8$$
$$y=m_o x+b_o$$

$$2x_1+3x_2\leqslant 120$$
$$2x_1+3x_2=120$$
$$x_1=0\rightarrow x_2=120/3=40$$
$$x_2=0\rightarrow x_1=120/2=60$$

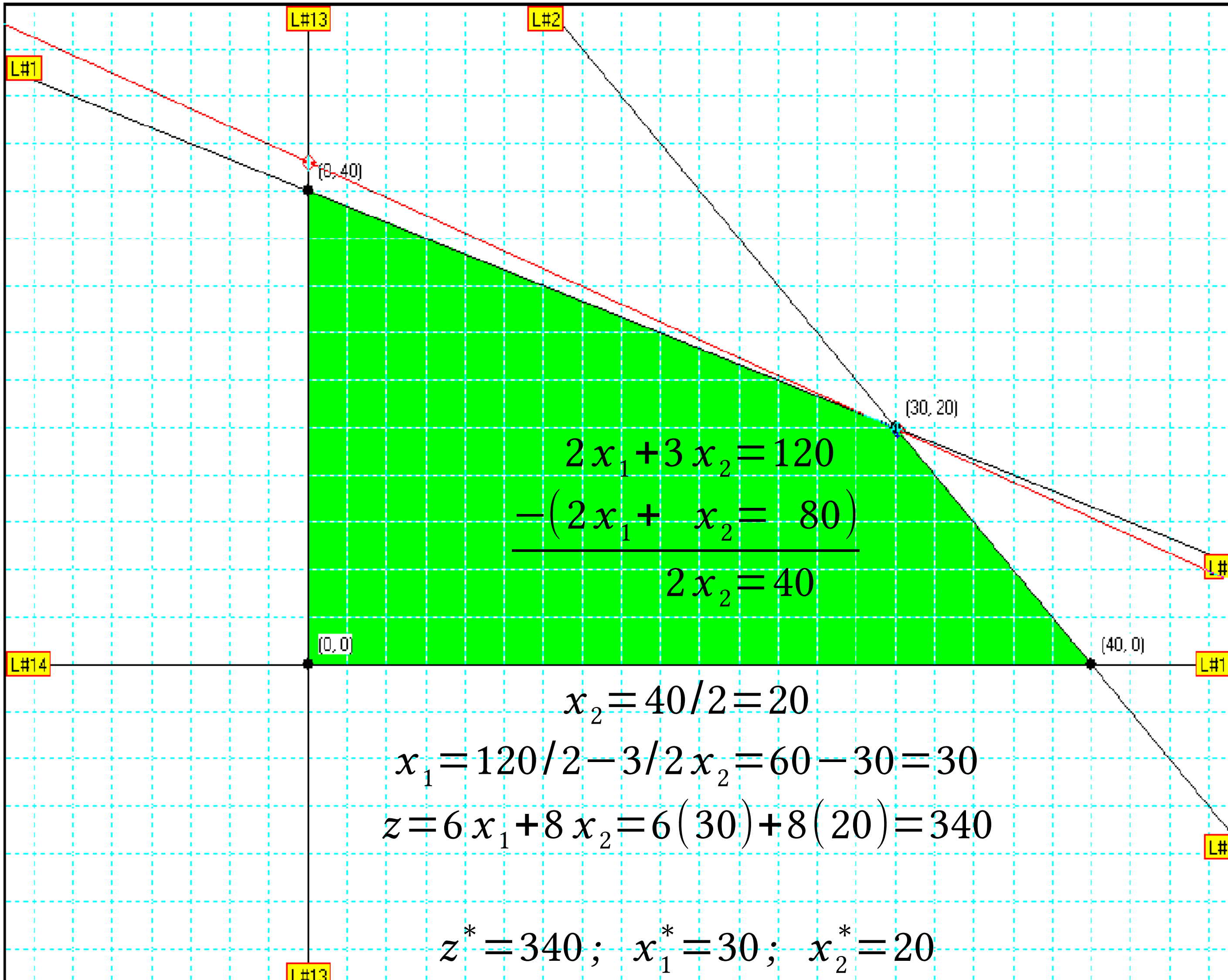
$$2x_1+x_2\leqslant 80$$
$$2x_1+x_2=80$$
$$x_1=0\rightarrow x_2=80$$
$$x_2=0\rightarrow x_1=40$$

$$2x_1+3x_2\leqslant 120$$
$$2x_1+3x_2=120$$
$$x_2=-2/3\,x_1+120/3$$
$$y=x_2;\quad x=x_1;\quad m_t=-2/3;\quad b_t=40$$
$$y=m_t x+b_t$$

$$2x_1+x_2\leqslant 80$$
$$2x_1+x_2=80$$
$$x_2=-2x_1+80$$
$$y=x_2;\quad x=x_1;\quad m_c=-2;\quad b_c=80$$
$$y=m_c x+b_c$$



La solución gráfica y la analítica



$$\begin{array}{r} 2x_1+3x_2=120 \\ \underline{-(2x_1+x_2=80)} \\ 2x_2=40 \end{array}$$

$$x_2=40/2=20$$

$$x_1=120/2-3/2\,x_2=60-30=30$$

$$z=6x_1+8x_2=6(30)+8(20)=340$$

$$z^*=340\,;\quad x_1^*=30\,;\quad x_2^*=20$$

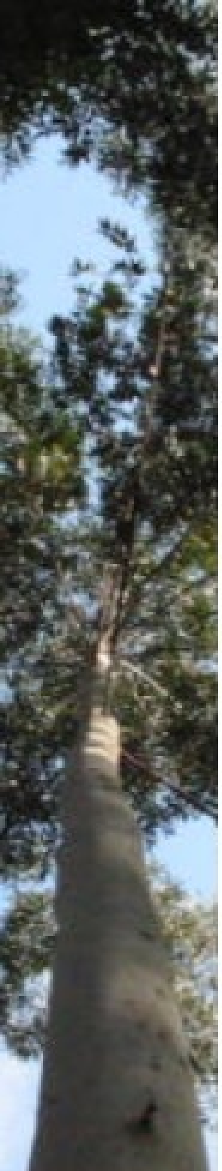
Otras formulaciones

- Supóngase que solamente las presas del sitio 1 proveen un oligoelemento esencial y que el requerimiento mínimo del mismo se satisface con 10 presas. Entonces, el nuevo problema podría ser:

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Maximizar} & 6x_1 + 8x_2 & = & z & (\text{valor calórico}) \\
\text{Sujeto a} & 2x_1 + 3x_2 & \leqslant & 120 & (\text{tiempo de traslado}) \\
 & 2x_1 + x_2 & \leqslant & 80 & (\text{tiempo de captura}) \\
 & x_1 & \geqslant & 10 & (\text{oligoelemento esencial}) \\
 & x_1,\ x_2 & \geqslant & 0 &
\end{array}
$$

- Dónde todas las variables ya fueron definidas.

- ¿Y si el requerimiento es que $\boldsymbol{x_1 = 10}$?

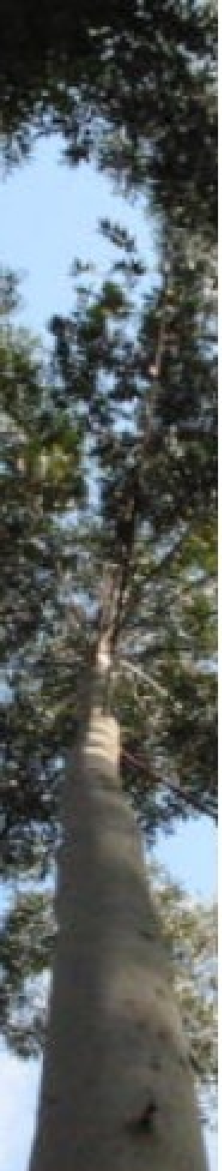


Un problema de minimización

- Ahora supóngase que el predador le asigna más importancia al tiempo de captura, al que lógicamente quiere minimizar. Sin embargo, el valor calórico aún tiene importancia. Entonces se requiere que la dieta provea al menos 240 calorías. Además, supóngase que el predador necesita al menos 90 mg de un nutriente esencial y que las contribuciones unitarias son 3 y 2 mg/presa de los sitios 1 y 2, respectivamente. El problema podría ser:

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Minimizar} & 2x_1 + x_2 & = & z & (\text{tiempo de captura}) \\
\text{Sujeto a} & 2x_1 + 3x_2 & \leqslant & 120 & (\text{tiempo de traslado}) \\
 & 6x_1 + 8x_2 & \geqslant & 240 & (\text{valor calórico}) \\
 & 3x_1 + 2x_2 & \geqslant & 90 & (\text{valor nutritivo}) \\
 & x_1,\ x_2 & \geqslant & 0 &
\end{array}
$$

- Dónde todas las variables ya fueron definidas.



Problemas no factibles y soluciones sin cota

- Supóngase que en el problema de minimización se estipula un requerimiento nutritivo de 190 mg:
  - **Problema No Factible**

- Ahora supóngase un problema diferente:

  Maximizar $z = x_1 + x_2$

  Sujeto a: $x_1 \leq 100$

  $x_1, x_2 \geq 0$

  - **Solución no acotada**

- ¿Y Maximizar $z = x_1 - x_2$?
  - **Problema Factible (Solución óptima)**

Formulación general

- Determinar los valores de $\boldsymbol{x_1} \geq 0$, $\boldsymbol{x_2} \geq 0$, …, $\boldsymbol{x_n} \geq 0$ tal que se maximize $\boldsymbol{z}$ y se verifiquen:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
c_1 x_1 & + & c_2 x_2 & + & \cdots & + & c_n x_n & = & z & (\mathrm{Max}) \\
a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \cdots & + & a_{1n} x_n & \leqslant & b_1 \\
a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \cdots & + & a_{2n} x_n & \leqslant & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \cdots & + & a_{mn} x_n & \leqslant & b_m
\end{array}
$$

- En el problema predador-presa:

$$
n=2,\ c_1=6,\ c_2=8,\ x_1,\ x_2,
$$
$$
m=2,\ b_1=120,\ b_2=80,
$$
$$
a_{11}=2,\ a_{12}=3,\ a_{21}=2,\ a_{22}=1.
$$

Formulación general

- Más compactamente:

$$\text{Maximizar} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{Sujeto a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

- Otras formas:

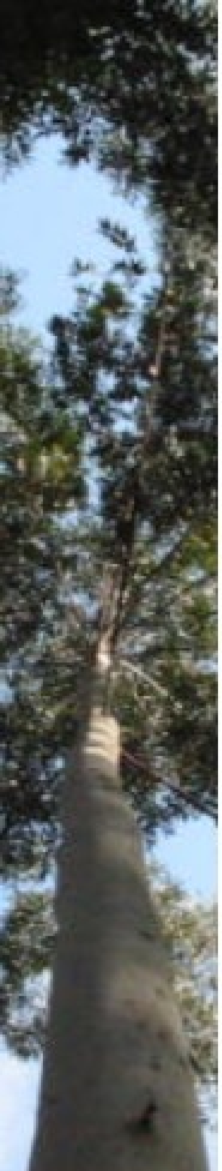
$$\max_{[x_j]} z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ; \quad | \text{ simboliza Sujeto a}$$

- En el problema predador-presa:

$$n = 2,\ j = \{1, 2\},\ c_1 = 6,\ c_2 = 8,\ x_1,\ x_2,$$

$$m = 2,\ i = \{1, 2\},\ b_1 = 120,\ b_2 = 80,$$

$$a_{11} = 2,\ a_{12} = 3,\ a_{21} = 2,\ a_{22} = 1.$$



Formulación general

- Más compactamente aún, en notación matricial:

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Maximizar} & c^T x & = & z & \\
\text{Sujeto a} & Ax & \leqslant & b & \quad A: m \times n \\
 & x & \geqslant & 0 &
\end{array}
$$

- En el problema predador-presa:

$$
m=2,\ n=2,\ c=\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}2 & 3\\2 & 1\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}120\\80\end{bmatrix}.
$$

- En todos los casos la instancia particular es:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Maximizar} & 6x_1+8x_2 & = & z \\
\text{Sujeto a} & 2x_1+3x_2 & \leqslant & 120 \\
 & 2x_1+\ \ x_2 & \leqslant & 80 \\
 & x_1,\ x_2 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

Axiomas de la Programación Lineal

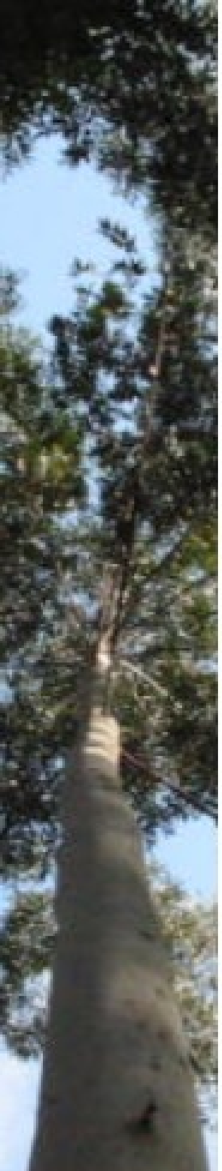
- **Proporcionalidad**: la contribución de cualquier actividad a la función objetivo es directamente proporcional al nivel de dicha actividad. Si el nivel de una actividad se incrementa o disminuye, el cambio en la función objetivo debido al cambio unitario en el nivel de actividad permanece constante. Igualmente, la cantidad de recursos usados por cada actividad es directamente proporcional al nivel de dicha actividad.

- **Aditividad**: la contribución de todas las actividades a la función objetivo está constituida por la suma de las contribuciones de cada actividad. De manera semejante, la cantidad total de un recurso usada por todas las actividades es la suma de las cantidades usadas por cada actividad considerada de manera independiente. Esto implica que la contribución de cada actividad (o el uso de recursos que hace) es independiente del nivel de las demás actividades.

Axiomas de la Programación Lineal

- **Continuidad**: las variables de decisión deben ser continuas y pueden tomar cualquier valor real dentro del dominio permitido. Normalmente el dominio es el de los números reales no negativos, aunque puede definirse un rango de límites arbitrarios dentro de este conjunto. Esto implica que el modelo no es adecuado para tratar con situaciones que requieran el planteo de variables que solo pueden tomar valores enteros o negativos.

- **Determinismo**: el modelo de la programación lineal es determinista. Esto implica que en el cálculo de una solución no se considera que los valores adoptados para los coeficientes y parámetros pueden ser meras aproximaciones.



Bibliografía básica

- Hillier FS & MS Hillier. 2008. Métodos cuantitativos para administración. 3° Edición. Mc Graw-Hill Interamericana. México DF, México. Capítulos 2 y 3: 17-114.

- Hillier FS & GJ Lieberman. 2010. Introducción a la investigación de operaciones. 9° Edición. McGraw-Hill. México. Capítulos 2 y 3: 7-80.