CURSO DE NIVELACIÓN DE FÍSICA - Unidad 3 – TRIGONOMETRÍA. MAGNITUDES ESCALARES. MAGNITUDES VECTORIALES. VECTORES. SUMA Y RESTA VECTORIAL

Objetivo: repasar conceptos de trigonometría en la resolución de figuras plana. Repasar conceptos sobre los distintos tipos de magnitudes. Repasar las principales operaciones con vectores.

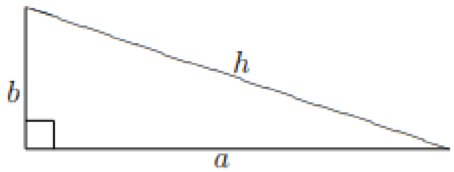
TRIGONOMETRÍA

La trigonometría estudia la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo. En esta sección vamos a ver y repasar cómo se definen dichas relaciones.

Teorema de Pitágoras y Funciones trigonométricas

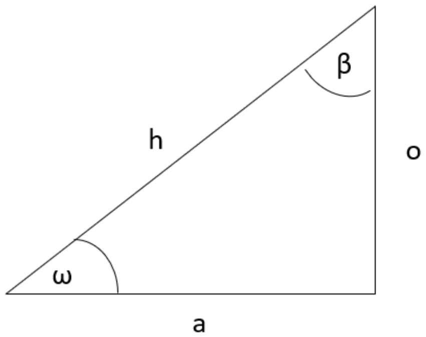
En un triángulo rectángulo (con un ángulo recto, es decir, de 90°) se llama hipotenusa al lado opuesto al ángulo recto y catetos a los lados adyacentes al ángulo recto.

El Teorema de Pitágoras plantea que en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:



$$\boxed{a^2 + b^2 = h^2}$$

Por otro lado, las funciones trigonométricas son las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo y solo dependen de sus ángulos. A partir de un ángulo (en este caso ω), podemos las funciones o relaciones trigonométricas de la siguiente manera:



$$sen\ \omega = \frac{o}{h}$$

$$cos\ \omega = \frac{a}{h}$$

$$tan\ \omega = \frac{o}{a}$$

$$\omega + \beta = 90°$$

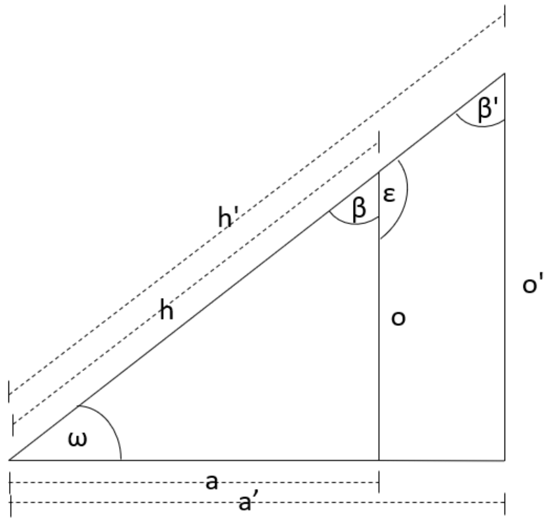
Donde **sen**, **cos**, y **tan** hacen referencia a las funciones **seno**, **coseno** y **tangente**, respectivamente. Notar que la denominación de los lados como **cateto opuesto (o)** y **cateto adyacente (a)**, es definida a partir del ángulo que estamos considerando (“cateto opuesto al ángulo ω”; “cateto adyacente al ángulo ω”), es decir que un mismo lado del triángulo puede ser considerado opuesto o adyacente, dependiendo el ángulo que se tome. No es así para la **hipotenusa (h)**, ya que siempre será el lado opuesto al ángulo recto.

Resulta útil pensar que $tan\ \omega = \frac{sen\ \omega}{\cos \omega}$ lo cual se puede demostrar fácilmente:

$$tan\ \omega = \frac{o}{a} = \frac{o/h}{a/h} = \frac{sen\ \omega}{\cos \omega}$$

Triángulos semejantes

Se dice que dos triángulos (o más) son semejantes cuando tienen la misma forma, pero sus tamaños son diferentes. Esto quiere decir que los valores de sus ángulos serán iguales, pero las longitudes de sus lados serán distintas. Sin embargo, se mantendrán la proporción entre sus lados:



$$\frac{a}{h} = \frac{a'}{h'} \qquad \beta = \beta'$$

$$\frac{a}{o} = \frac{a'}{o'} \qquad \beta + \varepsilon = 180°$$

$$\frac{o}{h} = \frac{o'}{h'}$$

En este ejemplo, el triángulo compuesto por los lados a, o, h es semejante al triángulo compuesto por los lados a’, o’, h’.

<u>**MAGNITUDES**</u>

En Física muchas de las cosas que medimos (**magnitudes**), requieren determinar una dirección y sentido, y al operar con estas **magnitudes** no podemos usar las operaciones matemáticas que normalmente conocemos. Es decir, hay magnitudes como el tiempo que quedan determinadas con un número y una **unidad**; mientras que, en el caso de otras **magnitudes**, como velocidad, no tendremos toda la información necesaria si no definimos la dirección y sentido de ésta. Por esto podemos dividir las **magnitudes en escalares y en vectoriales**.

Magnitudes escalares

Son aquellas cantidades que quedan determinadas por un número y una unidad exclusivamente. Ej: el tiempo, la densidad, el trabajo, la temperatura, etc.

Magnitudes vectoriales

Son aquellas que requieren, además de un número y su unidad, otros elementos para quedar completamente definidas: dirección, sentido y se representan mediante un vector (flecha). Ej: la fuerza, la velocidad, la intensidad del campo eléctrico, etc.

Vector

Es una flecha o segmento orientado que tiene los siguientes elementos gráficos que lo representan (Figura 1):

1) ***Dirección***: es la recta (r) a la cual pertenece el vector (si el vector representa a una fuerza, en este caso la dirección recibe el nombre de recta de acción de la fuerza).

2) ***Sentido****:* determinada la dirección, el sentido queda especificado con la punta de la flecha

3) ***Módulo****:* la longitud de la flecha referida a una unidad elegida (escala), representa el valor o intensidad de la magnitud. Se lo representa poniendo entre barras al símbolo del vector $|\mathbf{A}|$

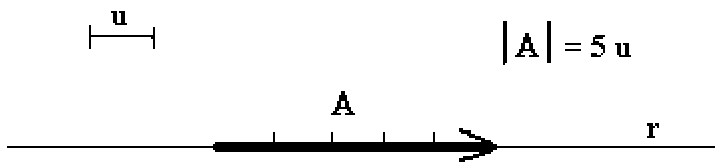


Figura 1

<u>**Suma y resta de vectores**</u>

1) ***Vectores colineales:*** *de igual dirección.*

1a) ***Colineales y de igual sentido;*** ver ej. Figura 2 suma de los vectores $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$:

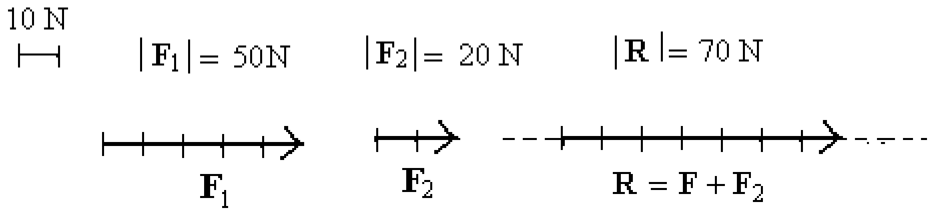


Figura 2

$$|\mathbf{R}| = |\mathbf{F}_1| + |\mathbf{F}_2| = 50\,\mathrm{N} + 20\,\mathrm{N} = 70\,\mathrm{N}$$

El resultado de $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, **vector suma o resultante R**, es otro vector cuya dirección es igual a la de los vectores dados; su sentido, el mismo de los vectores dados y el módulo es igual a la suma de los módulos de los vectores sumados.

2) ***Vectores concurrentes (no colineales):*** *sus rectas de acción se cortan en un punto.*

Método del paralelogramo para sumar 2 vectores concurrentes:

En la construcción de la figura 3 se forman dos triángulos. Uno de los lados determina el módulo

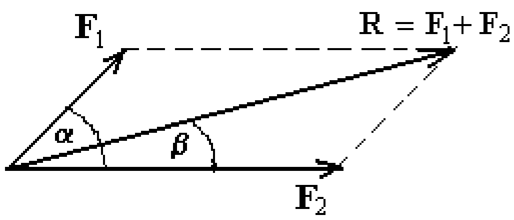


Figura 3

del vector suma $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$.

De la resolución de estos triángulos oblicuángulos se obtiene…

Por teorema del coseno:

$$|\overline{\mathrm{R}}| = \sqrt{|\overline{\mathrm{F}}_1|^2 + |\overline{\mathrm{F}}_2|^2 + 2\,|\overline{\mathrm{F}}_1||\overline{\mathrm{F}}_2|\cos\alpha}$$

por el teorema del seno:

$$\frac{sen\beta}{|\overline{\mathrm{F}}_1|} = \frac{sen\alpha}{|\overline{\mathrm{R}}|}$$

Pregunta: Si se mantienen constantes los módulos de los vectores sumados, pero se varía el ángulo que ellos forman. ¿Qué sucede con la resultante o suma? Fundamente la respuesta.

Ejercicio: Si dos fuerzas, de módulos $|\mathbf{F}_1| = 80$ N y $|\mathbf{F}_2| = 60$ N respectivamente, forman entre sí un ángulo de 90°. Hallar en forma gráfica y analítica la suma de ambas y el ángulo que forma la resultante con una de las fuerzas. **Rta:** Módulo del vector suma = 100N; ángulo formado por el vector suma y $\mathbf{F}_1$ = 36,8°.

Idem si forman 180°. **Rta:** Módulo del vector suma = 20 N

Opuesto de un vector

El opuesto de un vector es otro vector de igual dirección, igual módulo, pero diferente sentido al del anterior. $-\mathbf{F}_2$ es el vector opuesto de $\mathbf{F}_2$. ver fig. 11

Resta de vectores

Definida la suma de vectores, para restar un vector de otro se le suma al vector minuendo el opuesto del vector sustraendo.

Ej. La resta $\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 + (-\mathbf{F}_2)$ ver Figura 4

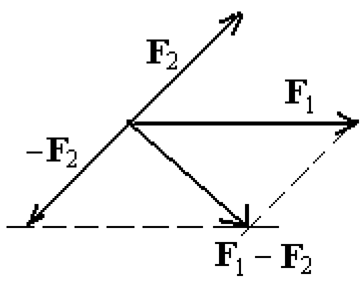
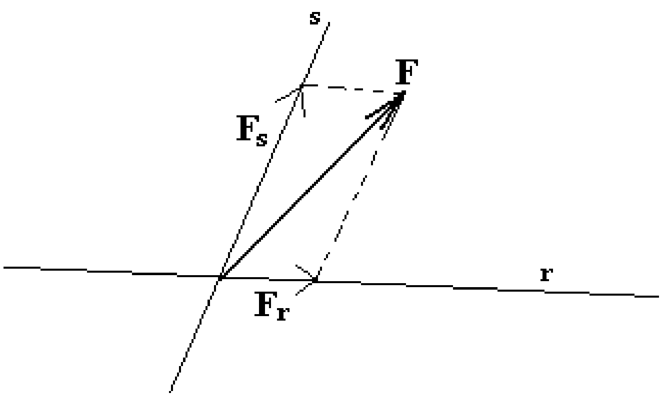


Figura 4

3) ***Suma de vectores coplanares por el método de la descomposición ortogonal de los mismos***

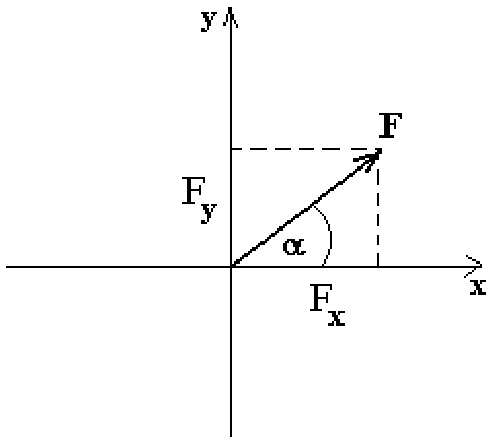
Componentes de un vector

Un vector se puede descomponer en dos vectores, según direcciones convenientes. El método gráfico de descomposición de un vector es el opuesto al método del paralelogramo. Ej:



$\mathbf{F}_s$ y $\mathbf{F}_r$ son las componentes del vector **F** en las direcciones **s, r** respectivamente.

Si la descomposición se realiza en dos direcciones perpendiculares, resultará:



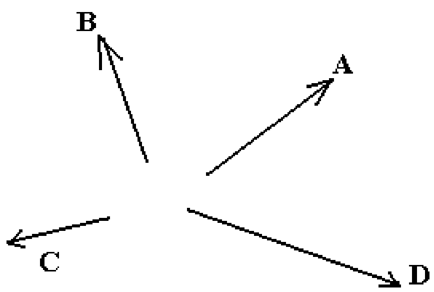
De la figura anterior y aplicando la definición de sen α y cos α en uno de los triángulos formados podemos calcular (analíticamente) las componentes ortogonales del vector dado (conocido el módulo del vector y el ángulo que forma con alguno de los ejes):

componentes ortogonales de F: $F_x = |\mathbf{F}| \cos\alpha$

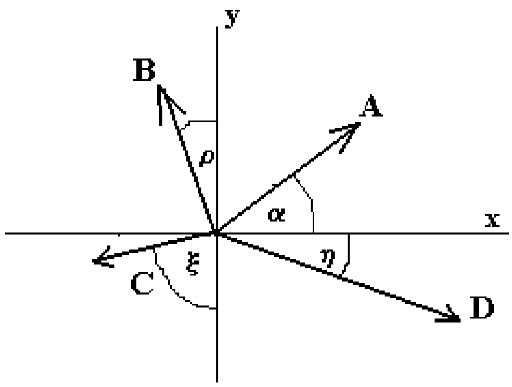
$F_y = |\mathbf{F}| \operatorname{sen}\alpha$

ángulo que especifica la dirección de F: $\alpha = \operatorname{arc\,tg}(F_y / F_x)$

Procedimiento para obtener la resultante de la suma de vectores concurrentes (recomendado cuando son muchos los vectores a sumar)



a) Se trasladan los vectores a lo largo de sus direcciones y se hacen coincidir los orígenes de los mismos con el origen de un sistema de ejes ortogonales, elegido en forma conveniente.



b) Se descomponen cada uno de los vectores en sus componentes ortogonales: **x** e **y**

$A_x = |\mathbf{A}| \cos\alpha$ $\qquad$ $C_x = -|\mathbf{C}| \operatorname{sen}\xi$

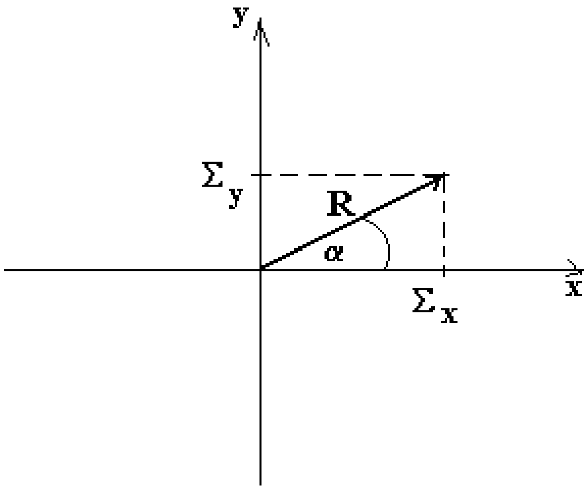
$A_y = |\mathbf{A}| \operatorname{sen}\alpha$ $\qquad$ $C_y = -|\mathbf{C}| \cos\xi$

$B_x = -|\mathbf{B}| \operatorname{sen}\rho$ $\qquad$ $D_x = |\mathbf{D}| \cos\eta$

$B_y = |\mathbf{B}| \cos\rho$ $\qquad$ $D_y = -|\mathbf{D}| \operatorname{sen}\eta$

c) Se suman algebraicamente (teniendo en cuenta sus signos) las componentes **x** y las componentes **y** respectivamente.

$\mathbf{R}_x = \sum_x = A_x + B_x + C_x + D_x$; $\qquad$ $\mathbf{R}_y = \sum_y = A_y + B_y + C_y + D_y$



d) Quedará así formado un triángulo rectángulo cuyos catetos serán las sumas de las componentes ya mencionadas y la hipotenusa (obtenida por el método del paralelogramo) nos dará el módulo y la dirección del vector resultante. Aplicando el teorema de Pitágoras se determina el módulo de este último y con alguna función trigonométrica se determina el ángulo que forma con uno de los ejes elegidos (la dirección).

$|\mathbf{R}| = \sqrt{(\sum_x)^2 + (\sum_y)^2}$

$\boldsymbol{\alpha} = \operatorname{arc\,tg}(\sum_y / \sum_x)$

NOTA: El método de descomposición ortogonal, será el que usemos con mucha frecuencia durante la cursada de Física, entonces ¡a prestarle atención!

EJERCITACIÓN – UNIDAD 3

Los ejercicios que se encuentran a continuación son similares a los que encontrarán durante la evaluación. Una vez leídos y vistos los materiales didácticos disponibles en el Aula Virtual, tratar de resolver los ejercicios aquí planteados. En caso de tener dudas al momento de resolverlos, anotarla y avanzar al siguiente ejercicio. Acudir a los horarios de consulta para despejar los ejercicios inconclusos.

Trigonometría

1) Durante el verano y al mediodía podemos suponer que los rayos provenientes del sol inciden perpendicularmente sobre la tierra. Si en ese momento un poste de alumbrado, inclinado 20° respecto a la vertical, proyecta una sombra sobre el suelo de 3 m, ¿qué longitud tiene el mismo? (**Rta: 8,77 m**)

2) ¿Cuál será la longitud de la sombra proyectada por la pared de una casa cuya altura es de 4,25 m, cuando los rayos solares inciden con un ángulo de 35° con respecto a la horizontal? (**Rta: 6,06m**)

3) Un rectángulo tiene un área de 200 cm^2. Si uno de sus lados mide 20 cm, calcular el valor de los ángulos que forma una de las diagonales del rectángulo con los lados del mismo. (**Rta: 26,56°; 63,44°**)

4) El pasajero de un tren en movimiento observa que las gotas de lluvia caen en una dirección oblicua formando un ángulo de 60° respecto a la vertical. Si la velocidad del tren es de 50 km/h, ¿con qué velocidad caen las gotas para un observador quieto en el anden? (**Rta: 28,86 km/h**)

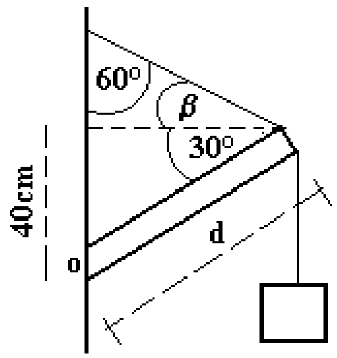
5) Los matemáticos dicen que para un determinado volumen el cuerpo geométrico de menor superficie es la esfera. Compare la superficie de un cubo con la de una esfera de igual volumen.

6) En muchos fenómenos fisicoquímicos, la superficie juega un papel preponderante. Si a un cuerpo cúbico de lado L lo dividimos en cubos de lado L'=L/3, ¿en cuánto incrementamos la superficie expuesta (externa)? Suponer que el volumen total no cambia. (**Rta: aumenta 3 veces**)

7) El siguiente diagrama representa un puntal articulado en **o** y sostenido por una soga, del cual pende libremente un cuerpo A. Con los datos consignados en el diagrama:

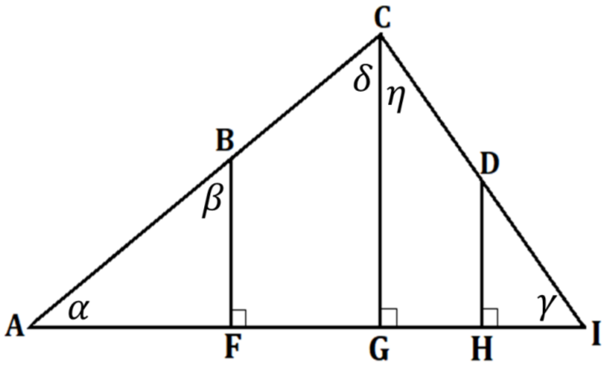
a) halle el ángulo β.

b) halle la longitud **d**



(**Rta: β = 30°; d = 80 cm**)

8) En la siguiente construcción geométrica se conocen las longitudes de los segmentos AB=30 cm y AF=20 cm. a) Calcule los ángulos α y β. b) Si el segmento BC=20 cm calcule el segmento AG. c) Si el segmento GI=20 cm calcule CI y γ . d) Calcule δ y η



(**Rta:** $\alpha = 48{,}19$, $\beta = 41{,}81$, AG=33,33 cm; CI=42,29 cm, $\gamma = 61{,}77$, $\delta = 41{,}81$, $\eta = 28{,}23$)

Vectores

1) Se aplican tres fuerzas con iguales rectas de acción y sentidos, de 200 N, 100 y 50 N, a un cuerpo. Hallar la resultante gráfica y analíticamente. Escala sugerida 50N/cm. (**Rta:│R│=350N**)

2) Cuatro vectores colineales tienen módulos de 3 u; 5u; 1u y 2,5u. El sentido de los dos primeros es contrario al de los dos último. Hallar el módulo y el sentido del vector que representa la suma de los mismos. (**Rta:│R│= 4,5 u; igual sentido que el de los primeros**)

3) Determinar (gráfica y analíticamente) la resultante de dos fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ cuyas rectas de acción forman un ángulo de 45°, si │$\mathbf{F_1}$│ = 1200 N y │$\mathbf{F_2}$│= 900 N.

(**Rta:│R│= 1943,5 N**)

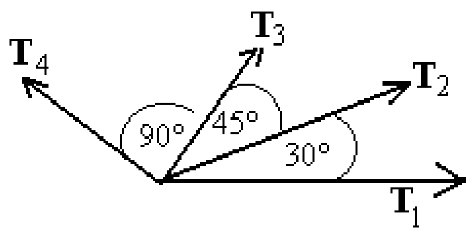
4) Idem anterior con un ángulo de 90° entre las fuerzas. (**Rta:│R│= 1500 N**)

5) Idem anterior con un ángulo de 135°. (**Rta:│R│= 850 N**)

6) Hallar la diferencia de las fuerzas ($\mathbf{F_1 - F_2}$) de los ejercicios anteriores.

(**Rta: 3)│R│= 850N; 4)│R│= 1500 N; 5)│R│= 1943,5 N**)

7) Hallar la suma de los siguientes vectores, gráfica y analíticamente (descomposición ortogonal).



| T_1 | = 9 u; | T_2 | = 8 u; | T_3 | = 5u; | T_4 | = 5 u; u: unidad arbitraria.

Hacer la representación con una escala conveniente. (**Rta: | S | = 16 u; ángulo entre S y T_1 = 39,2°**)