CURSO DE NIVELACIÓN DE FÍSICA - Unidad 2 - GEOMETRÍA. ECUACIONES

Objetivo: repasar y refrescar conceptos elementales sobre geometría, cálculo de de figuras geométricas y volúmenes de cuerpos y resolución de ecuaciones, necesarios para abordar los conceptos de Física Aplicada durante su futura cursada y al mismo tiempo consolidar técnicas de cálculo aprendidas en Matemática.

MEDIDA DE ÁNGULOS. FIGURAS GEOMÉTRICAS REGULARES.

Al estudiar Física nos encontramos muchas veces con figuras geométricas de las cuales debemos medir o calcular ángulos, lados, y relaciones entre estos. Por ejemplo, al medir fuerzas o velocidades, es importante conocer su dirección, es decir el ángulo que forma dicha magnitud respecto a una referencia como la horizontal. Repasemos algunos de estos conceptos.

Medida de ángulos

Se utilizarán dos sistemas, el sexagesimal, por su amplio uso en ciencia y en la vida cotidiana, y el circular, ya que es el indicado en el sistema internacional como el más adecuado para ciencias:

Sistema Sexagesimal

La unidad es el grado sexagesimal (°), que resulta de dividir la circunferencia en 360 partes; el ángulo subtendido por cada arco mide un grado sexagesimal. El ángulo recto mide 90°. Cada grado sexagesimal está dividido en 60 minutos y se lo simboliza así: 60'. Cada minuto sexagesimal está dividido en 60 segundos y se lo simboliza así: 60". Las calculadoras científicas tienen este sistema identificado con la sigla DEG.

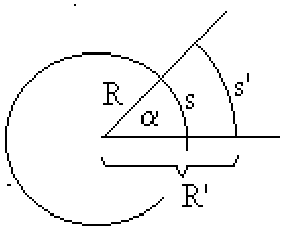
NOTA: Habitualmente, las calculadoras traen también la abreviatura GRA para trabajar con ángulos, pero significa grado centesimal (unidad francesa). En este sistema se divide la circunferencia en 400 partes y el ángulo subtendido por cada arco es un grado centesimal. Se asigna al ángulo recto 100 grados. Nosotros no lo utilizaremos.

Sistema Circular o Radián

La unidad es el radián (rad) y es unidad oficial del SI (Sistema Internacional de Medidas) y del SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino). Esta forma de medida es la más racional, ya que relaciona directamente la longitud del arco de una circunferencia con el radio de la misma. Las calculadoras tienen este sistema identificado con la sigla RAD.

Equivalencias:

Un radián es aquel ángulo cuya longitud de arco es igual a la longitud del radio. La longitud de la circunferencia es $2\pi R$; dividiendo por R da como resultado que los 360° equivalen a 2π = 6,283185.. rad.



$$\alpha\,(\text{rad}) = \frac{s}{R} = \frac{s'}{R'} = \text{constante}$$

$$360^\circ = \frac{2\pi R}{R} = 6{,}28....\text{rad}$$

$$180^\circ = \pi = 3{,}14159...\text{rad}$$

Además, una revolución (una vuelta): 1 rev = 360° = 2π

NOTA: Obsérvese que la letra π representa a un número irracional $\cong$ 3,14159....., y no a un ángulo de 180°. Por otra parte, la palabra radián es solo un nombre y no una unidad, pues el cociente arco/radio es adimensional, por consiguiente, no es necesario poner rad a continuación del número (salvo que sea necesario aclarar que se trata de la medida de un ángulo). El alumno deberá asegurarse que su calculadora está en el sistema de medición de ángulo que corresponde (DEG, RAD o GRA), antes de calcular el valor de una función trigonométrica (sen, cos, tan).

Un ángulo llano mide π radianes

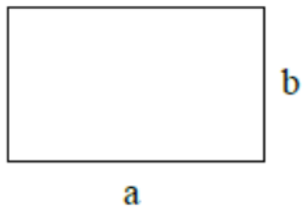
Luego, la equivalencia entre las unidades de los dos sistemas será:

90° = $\pi/2$ π = 180°

1° = $\pi/180$ (radianes) $\cong$ 0,0174 1 rad = $180/\pi \cong$ 57,324 °

<u>Figuras y cuerpos geométricos</u>

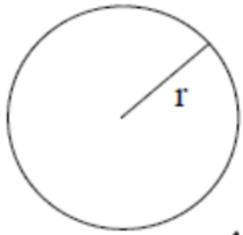
Durante el curso de Física, y también a lo largo de la carrera y en la vida profesional, muchas veces necesitaremos modelizar la realidad y nos encontraremos trabajando con distintas figuras geométricas y cuerpos geométricos, de los cuales necesitaremos conocer su superficie y volumen. A continuación, ofrecemos una lista de los que más utilizaremos.



Rectángulo

Área $A = a\,b$

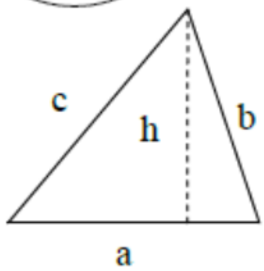
Perímetro $P = 2a + 2b$



Circunferencia

Área $A = \pi\, r^2$

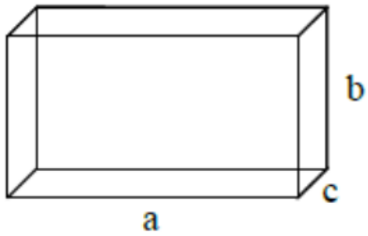
Perímetro $P = 2\pi\, r$



Triángulo

Área $A = (ah) / 2$

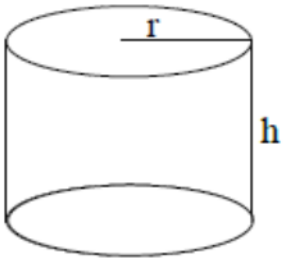
Perímetro $P = a + b + c$



Paralelepípedo rectangular recto

Área exterior $A = 2ab + 2ac + 2bc$

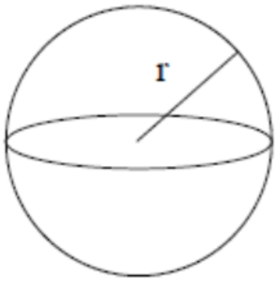
Volumen $V = abc$



Cilindro

Área exterior $A = 2\pi\, r^2 + 2\pi\, r\, h$

Volumen $V = \pi\, r^2\, h$



Esfera

Área exterior $A = 4\pi\, r^2$

Volumen $V = 4/3\ \pi\, r^3$

ECUACIONES LINEALES

En física, así como a lo largo de la carrera y de la profesión, necesitaremos resolver un sinfín de problemas. Una manera de solucionarlos es a través del planteo de una **ecuación.** Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas denominadas miembros, separadas por el signo igual, en la que aparecen elementos conocidos (datos) y elementos desconocidos (incógnitas), relacionados mediante operaciones matemáticas. Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes, mientras que las incógnitas se representan por lo general con las letras x, y, z.

La igualdad planteada a través de una ecuación, será verdadera o falsa según los valores numéricos que tomen las incógnitas. Es por esto que las soluciones de la ecuación son los valores numéricos que tomen las incógnitas para que la igualdad sea verdadera. Entonces, resolver la ecuación es calcular sus soluciones. Aquí veremos ecuaciones lineales o de primer grado, las cuales son equivalentes a la forma:

$$ax + b = 0, \qquad con\ a\ \neq 0$$

Repasemos algunos de los pasos generales para resolver ecuaciones:

- Quitar paréntesis (si los hubiese)
- Quitar denominadores (si los hubiese)
- Trasposición de términos: colocar los términos con incógnita en un miembro y los que no tienen incógnita en el otro miembro
- Agrupar términos: Sumamos en cada miembro los términos semejantes
- Despejar la incógnita

Veamos un ejemplo:

$$5(2x - 1) + 3(x - 2) = 10(x + 1)$$

Quitamos los paréntesis utilizando la propiedad distributiva:

$$5(2x - 1) = 5.2x + 5.(-1) = 10x - 5$$

$$3(x - 2) = 3.x + 3.(-2) = 3x - 6$$

$$10(x + 1) = 10.x + 10.1 = 10x + 10$$

La ecuación quedaría:

$$10x - 5 + 3x - 6 = 10x + 10$$

Juntamos los términos con x a la izquierda y los términos sin x a la derecha:

$$10x + 3x - 10x = 10 + 5 + 6$$

Sumamos los términos en cada miembro:

$$3x = 21$$

Y por último despejamos la incógnita:

$$x = \frac{21}{3} = 7$$

Recordar siempre que una vez que lleguemos al resultado, debemos comprobar la solución encontrada, reemplazándola en la ecuación original y verificar si se cumple la

Ahora que repasamos qué es y cómo se resuelve una ecuación, recordemos cómo se aplican para resolver ciertos problemas:

- Interpretar el enunciado para modelizar la situación-problema
- Definir una variable adecuada y plantear la ecuación que represente la situación
- Resolver la ecuación
- Comprobar el resultado obtenido, corroborando que satisface la ecuación
- Analizar que el resultado obtenido sea razonable

EJERCITACIÓN – UNIDAD 2 – Ángulos. Figuras y cuerpos geométricos. Ecuaciones.

Los ejercicios que se encuentran a continuación son similares a los que encontrarán durante la evaluación. Una vez leídos y vistos los materiales didácticos disponibles en el Aula Virtual, tratar de resolver los ejercicios aquí planteados. En caso de tener dudas al momento de resolverlos, anotarla y avanzar al siguiente ejercicio. Acudir a los horarios de consulta para despejar los ejercicios inconclusos.

h) Realizar las siguientes conversiones:

1) 23° = rad 2) 0,4 rad = °

3) 180° = rad 4) 45 rad = °

5) 2,3 π rad = ° 6) 450° = rad

7) 5 rev = rad 8) 0,2 rev = °

9) 30° 40’ 50”= rad 10) 15 rad = rev

i) Hallar el valor de la incógnita:

1) $x+3x+4x = 5$
2) $3x+6 = 2x+8$
3) $(2+6)/x = 2$
4) $(2+6)/x = 2x$
5) $1/x+4 =8$
6) $(8 - x)/x =1$
7) $4x^2+ 5x+3 = 2$
8) $(x^3)^{1/2} +2 = 4$
9) $x (x+x^2)+4 = x^2 +31$
10) $(-8+4 x^2)/ x^2 +4 = 6$
11) $\text{sen}(x) +2 = 2{,}707$
12) $3 - \cos(x) = 2{,}5$
13) $1.414 \text{ tag}(\alpha) = 2 \text{ sen}(\alpha)$
14) $\text{sen}^2(x) = 0{,}8$
15) $x (1/ x+2 x/ 3)+5 = 3 x^2 -x^2 /2$
16) $1/10 +1/s = 1/5$
17) $20x/(20+x) = 5$
18) $0{,}4 = (T - 200)/T$
19) $(350 -T)/350 = 3/5$
20) $900 / (Q-900) = 1{,}5$
21) $10 [1+0{,}002 (t - 5)] = 9{,}5 [1+0{,}0022(t-10)]$

j) Superficies y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos

1) Hallar el perímetro de una circunferencia de radio 10 cm. Expresarla en mm.

(**Rta**: $2\ 10^2 \pi$ mm $\cong 628{,}3$ mm)

2) Hallar el área del circulo que encierra la circunferencia anterior. Expresarla en m^2.

(**Rta**: $\pi\ 10^{-2}$ m^2 $\cong 3{,}14\ 10^{-2}$ m^2)

3) Hallar el volumen del espacio comprendido entre dos esferas concéntricas de radios r_1 y r_2 ; siendo $r_1 = 4/3\ r_2$. Expresar el resultado en función de r_1 .

(**Rta: 0,77 π r_1^3**)

4) Hallar el área de la superficie de una esfera, si su volumen es de $4{,}189\ 10^3$ cm^3

(**Rta: 1,256 10^3 cm^2**)

5) Hallar la suma de todas las longitudes de las aristas de un cubo cuyo volumen es de $27 cm^3$. (**Rta: 36 cm**)

6) Hallar la superficie exterior del prisma anterior. Expresarlo en m^2.(**Rta: $5{,}4\ 10^{-3}\ m^2$**)

7) Un cilindro A tiene un radio ra y una altura ha, mientras que otro cilindro B (coaxial con A) tiene un radio rb = ra/2 y una altura hb = ha/2. Exprese el volumen comprendido entre los dos cilindros como función de ra y ha. (**Rta: $7/8\ \pi\ ra^2\ ha$**)

8) Calcular la altura de un cilindro, en metros, si su superficie exterior es de 2 m^2 y el radio de su base es de 20 cm. (**Rta: 1,39 m**)

9) Una persona adulta requiere 2,00 mg de vitamina B_2 por día. Cuantos kg de queso debería comer diariamente si ésta fuera la única fuente de vitamina B_2, sabiendo que el queso contiene 5,50 μg por g? (**Rta: 0,363 kg**)

CLAVE DE CORRECCIÓN

h)	**i)**
1) (0,128 π)	1) (x = 5/8)
2) ($\cong$ 22,92 °)	2) (x =2)
3) ($\pi \cong$ 3,14)	3) (x = 4)
4) ($\cong$ 2579,58°)	4) (x =2)
5) (414)	5) (x =1/4)
6) (2,5 π)	6) (x =4)
7) (10 π)	7 (x_1 = - 0,25; x_2 = - 1)
8) (72°)	8) (x = 1,587)
9) ($\cong$ 0,53)	9) (x = 3)
10) ($\cong$2,39 rev)	10) (x = 2; x = -2)
	11) (x = 45°)
	12) (x = 60°)
	13) (α = 45°)
	14) (x =63,43°)
	15) (x = 1,8)
	16) (s = 10)
	17) (x = 6,667
	18) (T = 333,33)
	19) (T = 140)
	20 (Q = 1500)
	21) (t = 676,667)

Ecuaciones. Resolución

Ustedes deben leer los aspectos teóricos de la resolución de los sistemas de ecuaciones en la guía. En este apartado vamos a trabajar con los ejercicios del inciso i), donde tenemos que hallar el valor de “x” que satisface a la igualdad. Como ejemplo vamos a desarrollar paso a paso la resolución de algunos ejercicios, al final de la guía tienen la clave con los resultados. T

i) Hallar el valor de la incógnita

La resolución de este sistema lineal da como resultado la intersección de las rectas

2) $3x + 6 = 2x + 8$

Juntamos los términos con “x” en un lado y los términos independientes en el otro, siempre separando en términos y respetando paréntesis y corchetes, luego lo que está sumando, pasa restando, lo que está multiplicando pasa dividiendo

Operamos algebraicamente

$$3x - 2x = 8 - 6$$

$$(3 - 2)x = 2$$

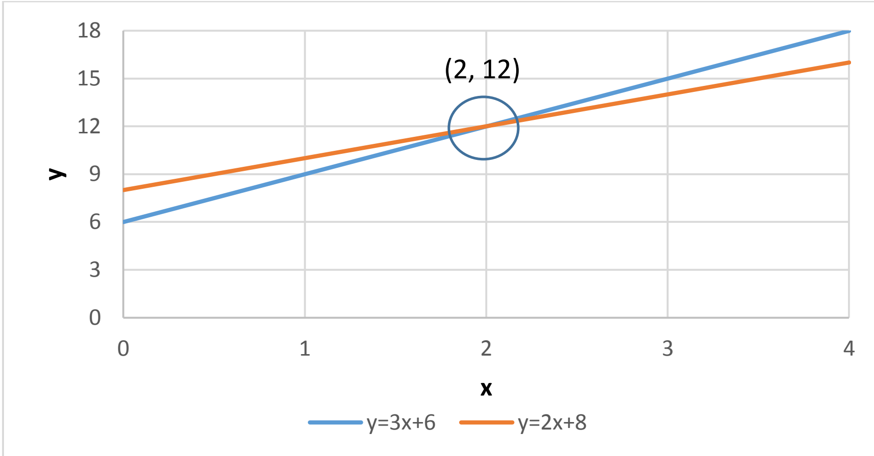
$$\boxed{x = 2}$$

Ahora que tenemos el valor de x=2, debemos probarlo en la ecuación, para eso reemplazamos “x” por su valor

$$3.2 + 6 = 2.2 + 8$$

$$\boxed{12 = 12}$$

x=2, cumple la condición y corresponde al punto de intersección de coordenadas (2, 12) que puede observarse en la resolución gráfica.



Resolvemos el ejercicio 9

9) $x(x+x^2)+4=x^2+31$

Operamos algebraicamente, distribuimos el producto en el paréntesis

$$x^2+x^3+4=x^2+31$$

Juntamos las "x" en un lado y los términos independientes en el otro

$$\cancel{x^2}+x^3-\cancel{x^2}=31-4$$

$$x^3=27$$

$$x=\sqrt[3]{27}$$

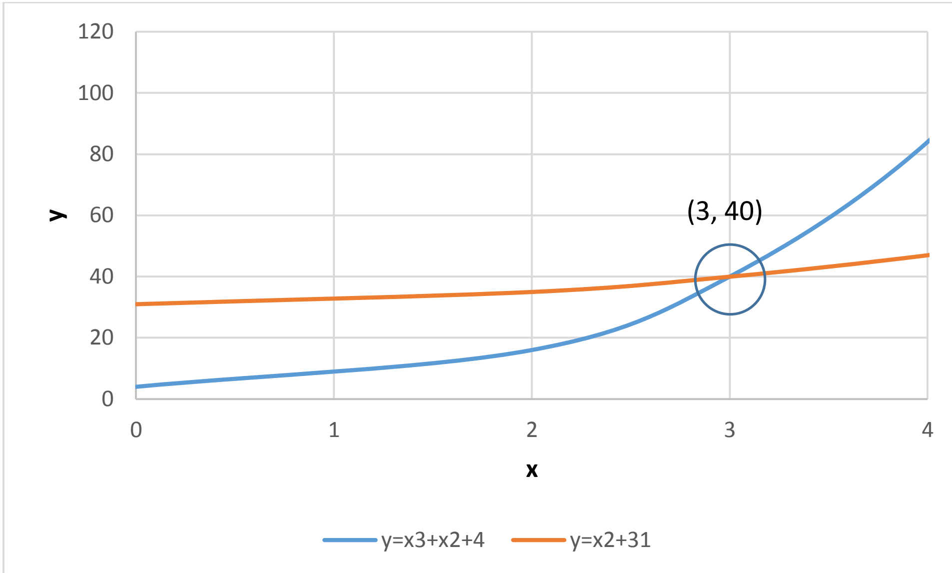
$$x=3$$

Comprobamos el resultado obtenido:

$$3(3+3^2)+4=3^2+31$$

$$40=40$$

El valor de x=3 satisface las ecuaciones con y=40, podemos observarlo gráficamente, estos valores son las coordenadas de la intersección de las funciones.



También vamos a desarrollar otros ejemplos:

1- Ahora vamos a resolver un ejemplo con ecuaciones cuadráticas:

$$5x^2 + 6x + 2 = 3x^2 + x$$

Juntamos los términos con “x”, para aplicar la ecuación de resolución de una cuadrática, es necesario igualarla a “0” (cero)

$$5x^2 - 3x^2 + 6x - x + 2 = 0$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

Se plantea la ecuación para resolver una cuadrática (Bhaskara), donde el término dentro de la raíz se llama “discriminante” y pueden ocurrir tres situaciones:

$\sqrt{b^2 - 4ac} = resultado\ positivo, se\ obtienen\ dos\ resultados\ x_1\ y\ x_2$

$\sqrt{b^2 - 4ac} = cero, se\ obtiene\ un\ solo\ resultado$

$\sqrt{b^2 - 4ac} = resultado\ negativo, no\ tiene\ solución\ real, la\ solución\ es\ "compleja"$

En los ejercicios que realizamos trabajaremos con ecuaciones cuadráticas y soluciones reales:

Donde:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\,2\,2}}{2\,2}$$

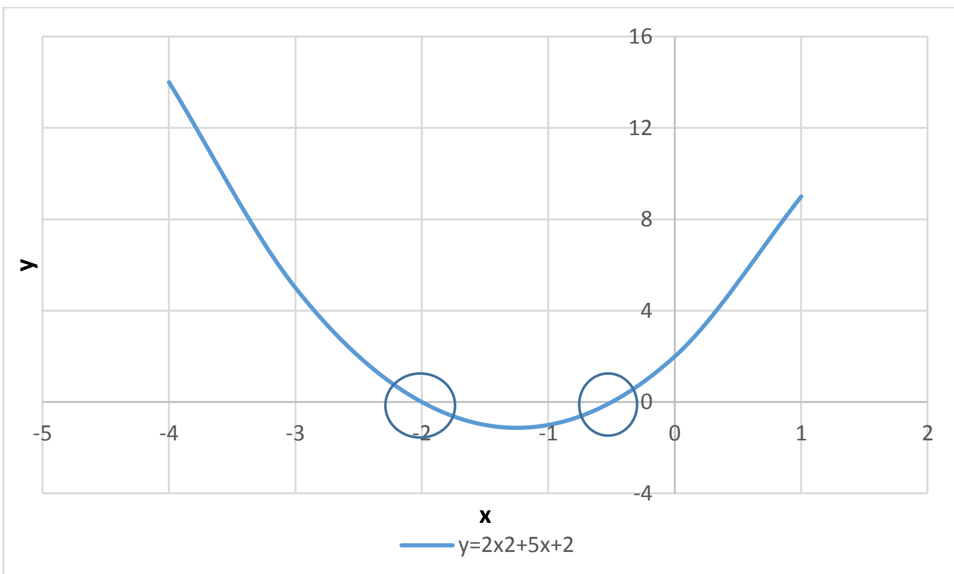
$$x_{1-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-5-3}{4} = -2$$

La resolución de una ecuación de segundo grado (cuando el discriminante es positivo) implica obtener los valores donde la función intercepta el eje “x” y se denominan raíces.

La gráfica de la función y la solución de las raíces, puede observarse en el siguiente gráfico.



2- Obtener el valor de x

$$5x = \frac{x^2 + a^2}{x}$$

Operamos algebraicamente, recuerden separar en términos:

$$5x\,x = x^2 + a^2$$

$$5x^2 - x^2 = a^2$$

$$4x^2 = a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{4}}$$

$$x = \frac{a}{2}$$

Verificamos si el valor obtenido cumple la condición, reemplazando x por la expresión “a/2”

$$5x = \frac{x^2 + a^2}{x}$$

$$5\frac{a}{2} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}{\frac{a}{2}}$$

$$5\frac{a}{2} = \frac{\frac{a^2 + 4a^2}{4}}{\frac{a}{2}}$$

$$5\frac{a}{2} = \frac{5\frac{a^2}{4}}{\frac{a}{2}}$$

$$5\frac{a}{2} = \frac{5a^2\ 2}{4\ a}$$

Se simplifica el cuadrado de la “a” con “a” y el 4 con el 2 obteniéndose la igualdad que satisface la ecuación propuesta.

$$5\frac{a}{2} = 5\frac{a}{2}$$