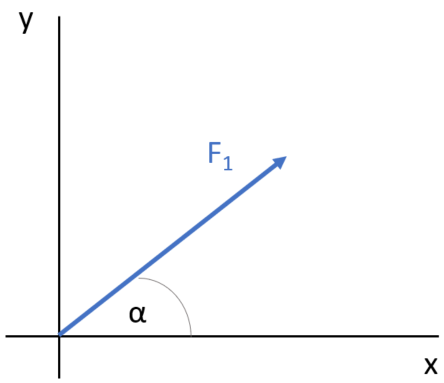
Ejemplos resueltos – Unidad 3 – Vectores

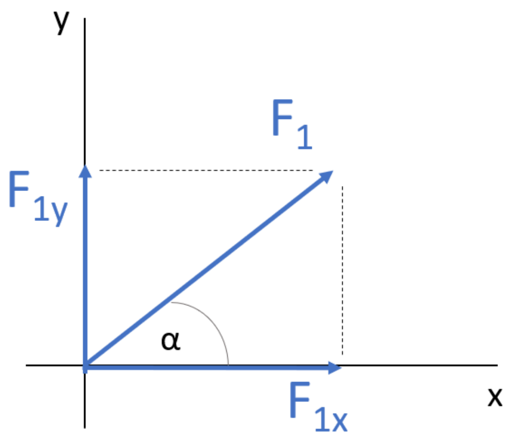
<u>Ejemplo 1</u>

Según la siguiente Figura, sabiendo que α = 30° y |F_1|=15 N, determinar el valor de F_{1x} y F_{1y}



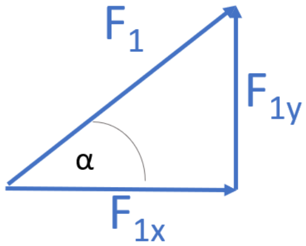
Resolución propuesta:

El ejercicio nos plantea que calculemos las componentes en el eje *x* y en el eje *y* del vector F_1, conociendo su módulo (15 N) y el ángulo que forma con el eje *x* (30°). Como sabemos, podemos descomponer cualquier vector, en los ejes cartesianos (en *x, y*), lo cual nos permite eventualmente realizar operaciones con vectores (método de descomposición ortogonal). Pero por ahora pongamos atención en cómo es la descomposición de un vector. Como dijimos, podemos proyectar las componentes del vector en los ejes *x, y*. Nos quedaría así:



Proyectamos el vector en los ejes cartesianos (*x, y*)

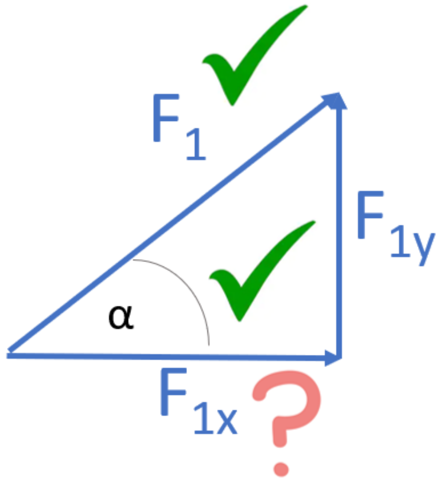
Es importante entender que, para descomponer un vector, debemos "armarnos" un triángulo rectángulo para poder resolver utilizando funciones trigonométricas. Si tomamos el vector como la hipotenusa, y las componentes como sus catetos, nos queda un triángulo rectángulo (ya que los catetos F_{1x} y F_{1y} forman un ángulo de 90° debido a que los ejes cartesianos forman un ángulo de 90°):



Nos queda un triángulo rectángulo donde:

F_1 es la hipotenusa
F_{1x} es el cateto adyacente (con respecto a α)
F_{1y} es el cateto opuesto (con respecto a α)

Sabemos que para resolver un triángulo rectángulo necesitamos al menos 2 elementos de dicho triángulo. Aquí conocemos la hipotenusa (F_1=15 N) y un ángulo (α=30°). Así que podemos resolverlo. Para esto necesitamos tener bien en claro qué elementos tenemos, cuál queremos conocer y cómo están relacionados entre sí para poder plantear la relación trigonométrica. **Empecemos por calcular F_{1x}:**



Conocemos la **hipotenusa**, el **ángulo** y queremos calcular el **cateto adyacente**

Cuando tenemos bien identificado qué conocemos y qué queremos calcular, debemos preguntarnos cuál función trigonométrica relaciona mis elementos en cuestión. Sabemos que, en este caso, están relacionados a través del coseno:

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{F_{1x}}{F_1}$$

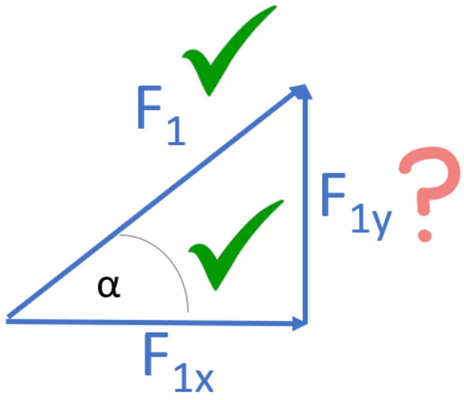
Despejando nuestra incógnita (F_{1x}) nos queda:

$$F_1 * cos\alpha = F_{1x}$$

Reemplazamos con nuestros datos:

$$F_{1x} = 15N * \cos(30°) = 12{,}99N$$

Para el caso de la componente de F_1 en el eje *y* (F_{1y}) nos quedaría el siguiente triángulo y sus datos:



Conocemos la **hipotenusa**, el **ángulo** y queremos calcular el **cateto opuesto**

Nos preguntarnos cuál función trigonométrica relaciona mis elementos en cuestión. Sabemos que, en este caso, están relacionados a través del seno:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{F_{1y}}{F_1}$$

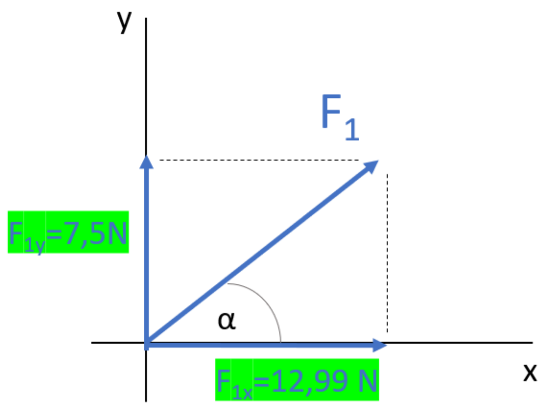
Despejando nuestra incógnita (F_{1y}) nos queda:

$$F_1 * sen\ \alpha = F_{1y}$$

Reemplazamos con nuestros datos:

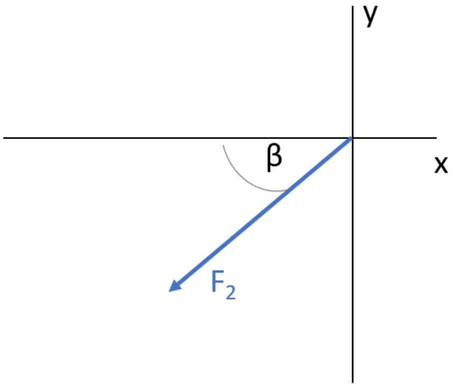
$$F_{1y} = 15N * \mathrm{sen}(30°) = 7{,}5N$$

Entonces, los **módulos** de los componentes del vector F_1 en los ejes cartesianos (*x, y*) serán $|F_{1x}|$=12,99N y $|F_{1y}|$=7,5N, siendo su **signo positivo para ambos**, ya que apuntan hacia la derecha y hacia arriba, respectivamente:

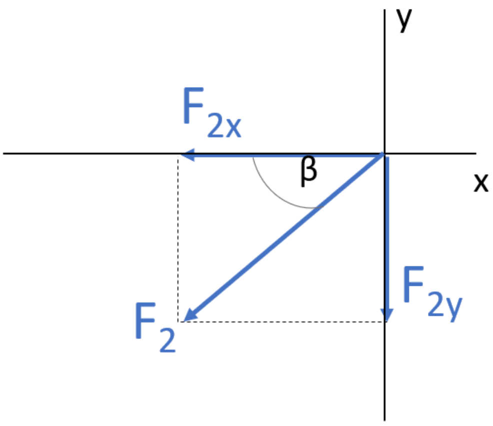


EJEMPLO 2-

Según la siguiente Figura, sabiendo que $|F_2|$=20 N y F_{2y}=-16N, determinar el valor de β y la componente de F_2 en el eje *x* (F_{2x}).

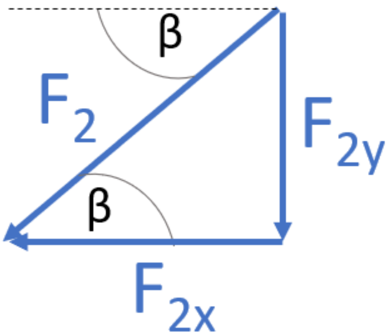


Este ejemplo es muy similar al ejemplo 1, pero notemos que el vector se encuentra en el cuadrante III, quedando sus proyecciones en los ejes cartesianos del lado de los negativos (por eso el vector F_{1y} es igual a -16N). Veamos las proyecciones:



Proyectamos el vector en los ejes cartesianos (*x, y*)

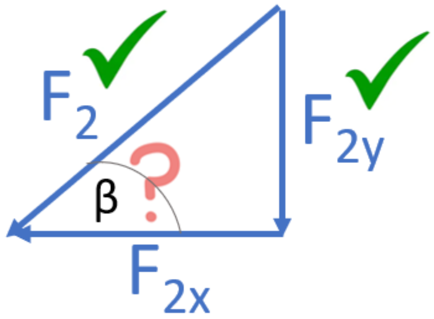
Esto quiere decir que las componentes F_{1x} y F_{1y} tendrán signos negativos (ya que apuntan hacia el lado de los negativos). Sin embargo, nosotros cuando "armemos" nuestro triángulo rectángulo, trabajaremos con los módulos de F_{1x} y F_{1y}. Pero tendremos que tener esto en cuenta. Armemos entonces nuestro triángulo rectángulo:



Nos queda un triángulo rectángulo donde:
F_1 es la hipotenusa
F_{1x} es el cateto adyacente (con respecto a β)
F_{1y} es el cateto opuesto (con respecto a β)

NOTA: fijarse que β es también el ángulo que forman F_1 y F_{1x} ya que son alternos internos.

Veamos entonces qué elementos conocemos del triángulo y qué queremos averiguar, para ver qué relación trigonométrica usaremos:



Conocemos la **hipotenusa**, el **cateto opuesto** y queremos calcular el **ángulo β**

Nos preguntarnos qué función trigonométrica relaciona mis elementos en cuestión. Sabemos que, en este caso, están relacionados a través del seno:

$$sen\ \beta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{F_{1y}}{F_1}$$

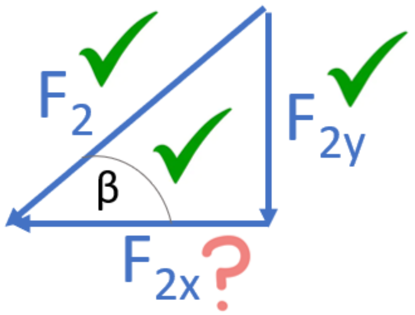
Despejando nuestra incógnita (β) nos queda (recordar que la función seno pasa al otro lado como su inversa, es decir como arcseno. En la calculadora esta función se obtiene apretando la tecla *shift* y luego la tecla *sin*):

$$\beta = arcsen\left(\frac{F_{1y}}{F_1}\right)$$

Reemplazamos con nuestros datos:

$$\beta = arcsen\left(\frac{16N}{20N}\right) = 53{,}13°$$

Finalmente, **para calcular la componente F_{2x}** planteamos nuevamente nuestro triángulo, viendo qué tenemos y qué función trigonométrica podemos plantear:



Ahora que conocemos el ángulo β, podemos usarlo junto con F_2 (hipotenusa) para averiguar F_{2x} (cateto adyacente). Estos tres elementos están relacionados por la función coseno:

$$cos\ \beta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{F_{2x}}{F_2}$$

Despejando nuestra incógnita (F_{2x}) nos queda:

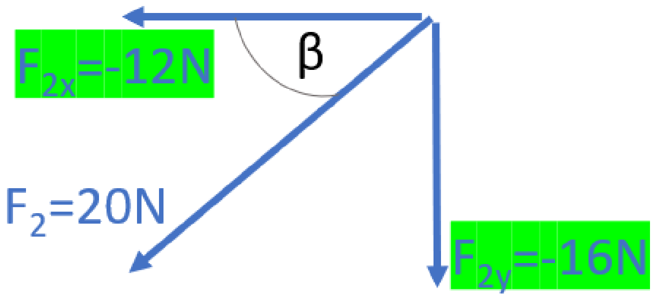
$$F_2 * cos\beta = F_{2x}$$

Reemplazamos con nuestros datos:

$$F_{2x} = 20N * \cos(53{,}13°) = -12N$$

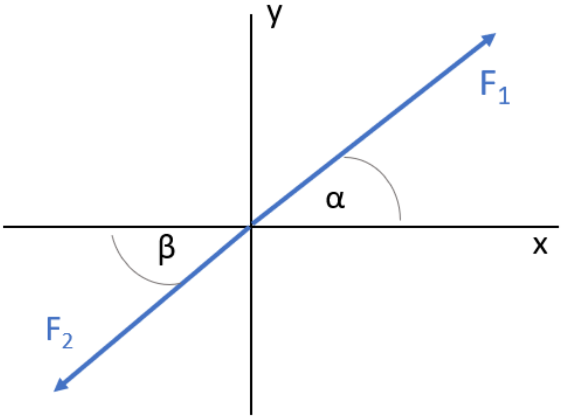
Recordar: el signo negativo se lo damos nosotros al final, ya que el vector apunta hacia la izquierda (según la convención adoptada, los vectores que apuntan hacia la derecha son positivos y los que apuntan hacia la izquierda son negativos).

Entonces, nuestro vector queda descompuesto de la siguiente manera:

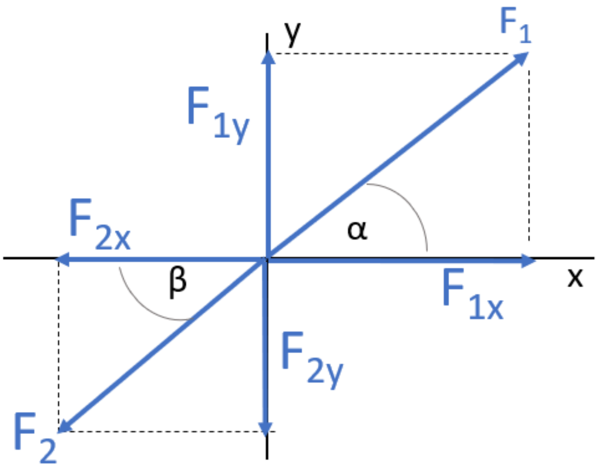


EJEMPLO 3-
En base a los ejemplos anteriores, hallar la suma de $F_1 + F_2$.

En este ejemplo nos pide que calculemos la suma de los dos vectores que trabajamos en los ejemplos 1 y 2.



Para realizar la suma de dos vectores no colineales (que no comparten la misma recta de acción) debemos realizar la descomposición de ambos vectores en los ejes cartesianos, sumar las componentes en el eje *x*, en el eje *y*, para luego aplicar el teorema de Pitágoras y encontrar el vector resultante (F_R). Empecemos con la descomposición de los vectores:



En los ejemplos anteriores ya fueron calculadas todas las componentes de ambos vectores. Entonces podemos sumar las componentes de cada eje (teniendo en cuenta su signo):

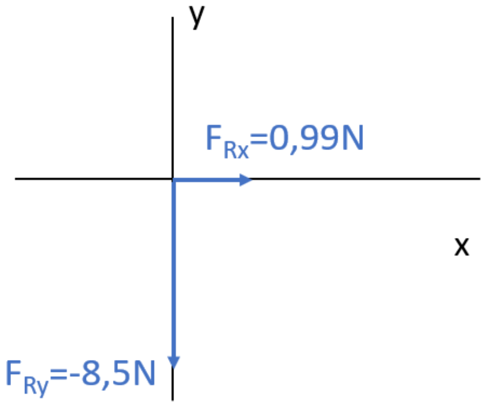
<u>Eje x</u>

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} = 12{,}99N + (-12N)$$
$$F_{Rx} = 0{,}99N$$

<u>Eje y</u>

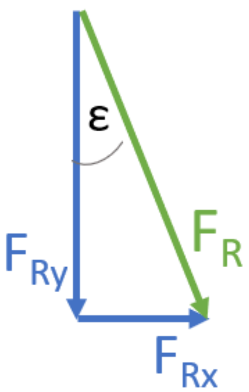
$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} = 7{,}5N + (-16N)$$
$$F_{Ry} = -8{,}5N$$

Es decir que tenemos un vector resultante con sus componentes en los ejes cartesianos de la siguiente manera:



Notar que el vector F_{Rx} es positivo, así que apunta hacia la derecha, mientras que el vector F_{Ry} es negativo, así que apunta hacia abajo

Para hallar el vector resultante planteamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que se forma, donde la hipotenusa será el vector F_R, que formará un ángulo con la vertical (ε):



Entonces F_R será:

$$F_R = \sqrt{{F_{Rx}}^2 + {F_{Ry}}^2}$$

$$F_R = \sqrt{(0{,}99N)^2 + (8{,}5N)^2}$$

$$F_R = 8{,}55N$$

Y el ángulo que forma con la vertical (ε) será:

$$tg\ \varepsilon = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{F_{Rx}}{F_{Ry}}$$

$$\varepsilon = arctg\left(\frac{0{,}99N}{8{,}5N}\right)$$

$$\varepsilon = 6{,}64°$$