Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

CÁLCULO ESTADÍSTICO Y BIOMETRÍA

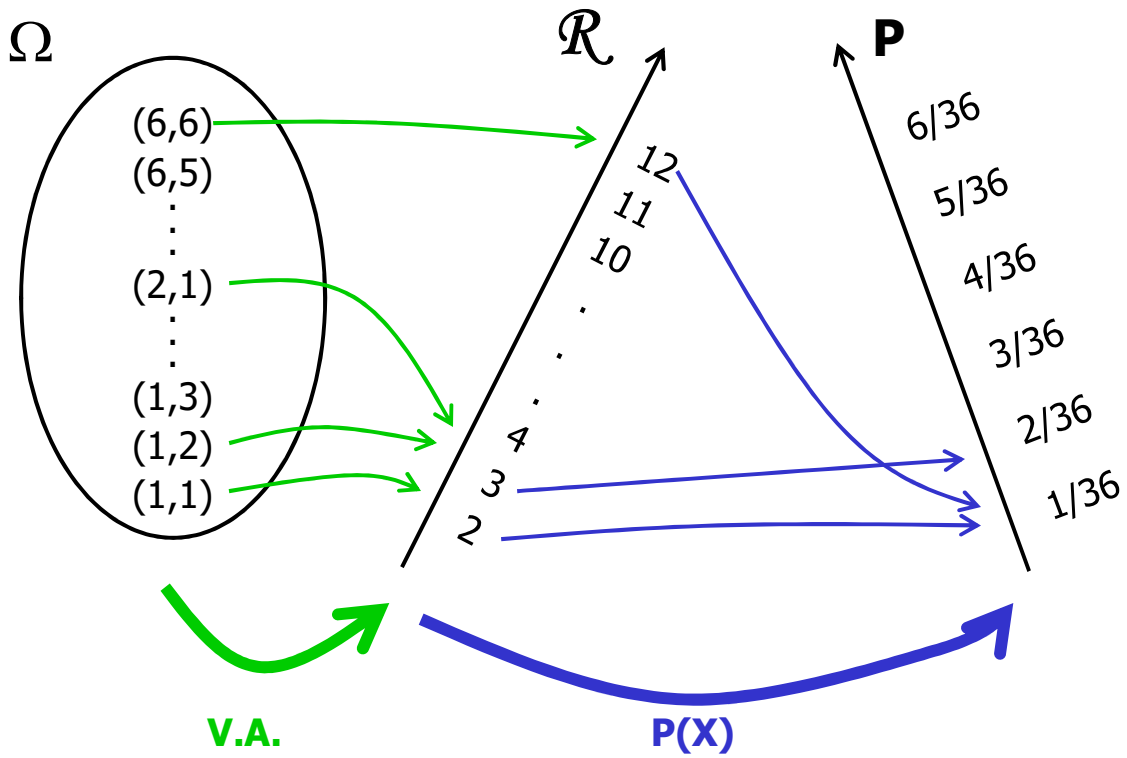
Variable aleatoria

Dado un espacio muestral Ω asociado a un experimento aleatorio, se define como V.A. a toda función que aplica a cada resultado del Ω un numero real.

Es asociarle un número a cada resultado de un experimento aleatorio.

	Ejemplo 1	Ejemplo 2
Experimento aleatorio	**Tirar dos dados**	**Extaer 4 frutos clasificándolos en sano/enfermo**
Espacio muestral	**{(1,1); (1,2); (1,3); ..... ; (6,6)}**	**{(S,S,S,S); (S,S,S,E); (S,S,E,S); ..... ; (E,E,E,E)}**
Variable aleatoria	**Suma de puntos**	**Nro. de frutos enfermos**
Recorrido V.A.	**{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}**	**{0,1,2,3,4}**

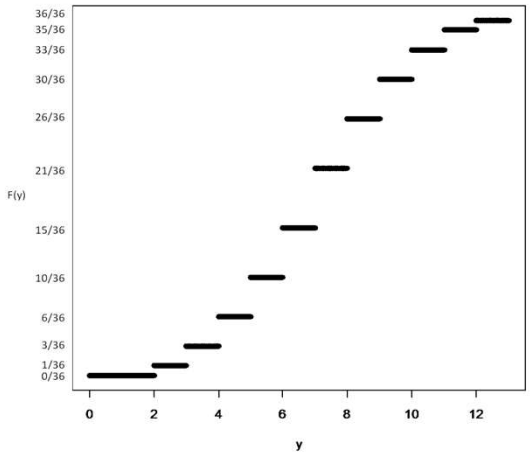
Asignarle un probabilidad a cada valor del recorrido de una V.A. (X) es encontrar la Distribución de probabilidad de esa V.A.

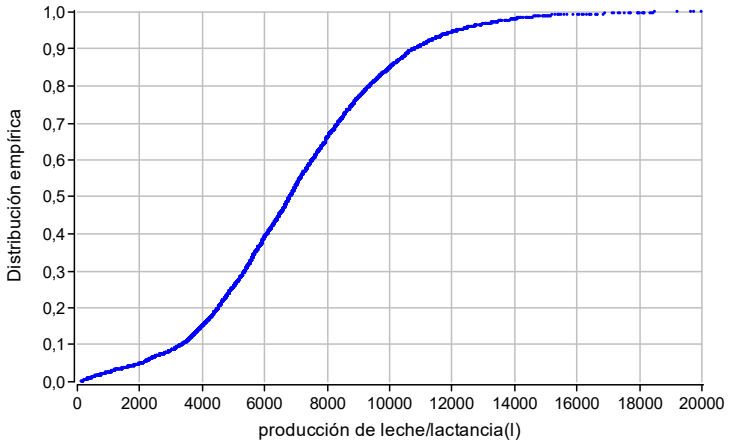


P(X): función de cuantía o función de distribución de probabilidades

Distribución de variables aleatorias

- **Función de distribución de probabilidad f**(x)
- **Función de densidad f**(x)
- **Función de distribución (acumulada) F**(x)





Función de distribución de probabilidad

- *La función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta (X), denotada por f(x), es una función f:* $\mathcal{R} \rightarrow [0,1]$ *tal que:*

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) \ \ si \ x \in C \\ \\ 0 \ en \ caso \ contrario \end{cases}$$

donde $C = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ *es el conjunto de valores que puede asumir la variable aleatoria X*

Función de densidad

- *La función de una variable aleatoria continua (X) denotada por f(x) es una función densidad si se cumple:*

  - $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in R_x$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$
  - $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx$

Función de distribución acumulada

- La distribución de una variable aleatoria, independientemente del tipo de variable, puede representarse también por su **función de distribución acumulada**, denotada como F(x). Esta función asigna a cada valor de la variable un valor entre 0 y 1 que indica la probabilidad de que la variable, observada para un caso particular, asuma un valor menor o igual al valor en que se está evaluando la función.

Repaso de conceptos

Experimento: Observar 3 semillas y registrar su estado sanitario.

- Cada semilla puede estar: sana (S) o enferma (E)
- Hay 8 resultados posibles que conforman el espacio muestral:

  Ω = {SSS , SSE , SES , ESS , SEE , ESE , EES , EEE}

- Si definimos la variable aleatoria (X) como el "*número de semillas enfermas*"
- *Los valores de la V.A. serán: 0 1 2 3*

Repaso de conceptos

X	*p (x) o f (x)*	*F(x)*
0	1/8	1/8
1	3/8	4/8
2	3/8	7/8
3	1/8	8/8
	8/8 = 1	

- *Distribución de probabilidades: pares de valores* $[x_i ; P(x_i)]$
- *Función de probabilidades: columna P(x) o f(x)*
- *Función de distribución acumulada: columna F(x)*

Esperanza y Varianza

- Si bien las funciones de probabilidad y de densidad, de las variables aleatorias discretas y continuas, contienen toda la información sobre los procesos que generan los datos de la variable, usualmente es conveniente resumir las principales características de la distribución.
- Para todas las distribuciones existen valores numéricos (constantes) que se denominan parámetros de la distribución.

Media teórica o Esperanza

$$E(X) = \mu_X = \sum_{\forall x \in R_x} x \cdot p(x)$$

Algunas Propiedades:

$E(a+b.X) = a + b.E(X)$

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Varianza

$$V(X) = \sigma_X^{\,2} = E\left[(x-\mu)^2\right]$$

$$V(X) = E[X^2] - \left[E(X)\right]^2 = \sum_{\forall x \in R_x} x^2 \cdot p(x) \; - \; \mu^2$$

Algunas Propiedades:

$V(a+b.X) = b^2.V(X)$

Distribución Binomial

- La **distribución Binomial** puede usarse para el cálculo de probabilidades de eventos provenientes de conteos acotados.
- Se origina cuando se cuentan el número de "Éxitos" en "n" experimentos independientes cuyos resultados posibles son: éxito o fracaso y el éxito tiene una cierta probabilidad (p) de ocurrencia (cada uno de estos ensayos se lo conoce como **ensayo Bernoulli**)

Función de probabilidad

La función de probabilidad de una variable aleatoria X que se distribuye como una Binomial puede expresarse como:

$$f(x;n,p) = \begin{cases} \binom{n}{x}.\ p^x\ .\ (1-p)^{n-x} & si \quad x = 0,1,\dots,n. \\ \\ 0\ en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Siendo: p la probabilidad de éxito

n el número de ensayos

(1 - p) = q la probabilidad de fracaso, por lo tanto p + q = 1

Los parámetros de la distribución Binomial son n y p

E(X) = *n* . *p* **V(X) = *n* . *p* . (1-*p*)**

Ejercicio 1

- Si se quiere calcular la probabilidad de que al tirar 20 veces una moneda se obtengan exactamente 12 caras, es decir, P (X = 12)

Dado que **1)** los resultados de cada ensayo sólo pueden pertenecer a la categoría "éxito" o "fracaso", **(2)** los n ensayos son independientes, y **(3)** la probabilidad de ocurrencia (éxito), permanece constante en cada ensayo.

$$P(X = x) = C_x^n \; p^x \; (1-p)^{n-x}$$

$$P(X = 12) = C_{12}^{20} \; 0{,}5^{12} \; (1-0{,}5)^{20-12} = \mathbf{0{,}1201}$$

Ejercicio 2

- En un monte frutal 20% de los árboles están enfermos. Si vamos a elegir una muestra de 5 árboles queremos estudiar como será la V.A. 'nro. árboles enfermos en la muestra'

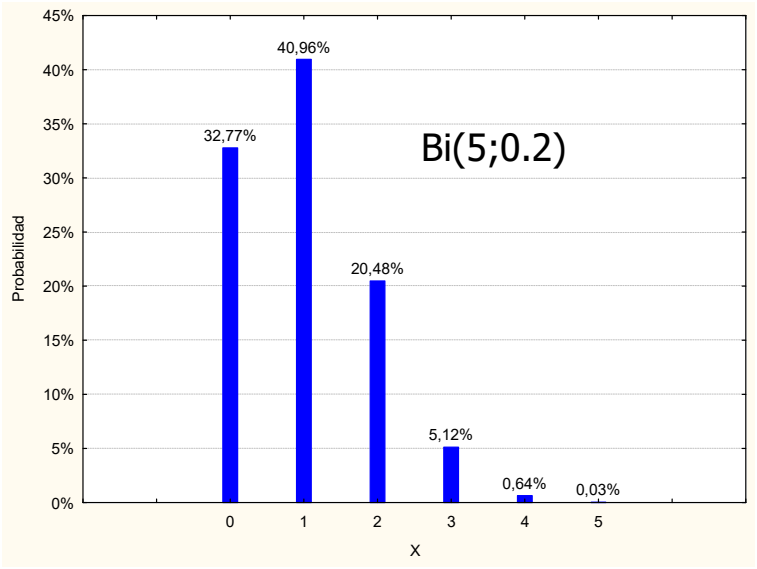
X	0	1	2	3	4	5
P (x)	0,3277	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,00032

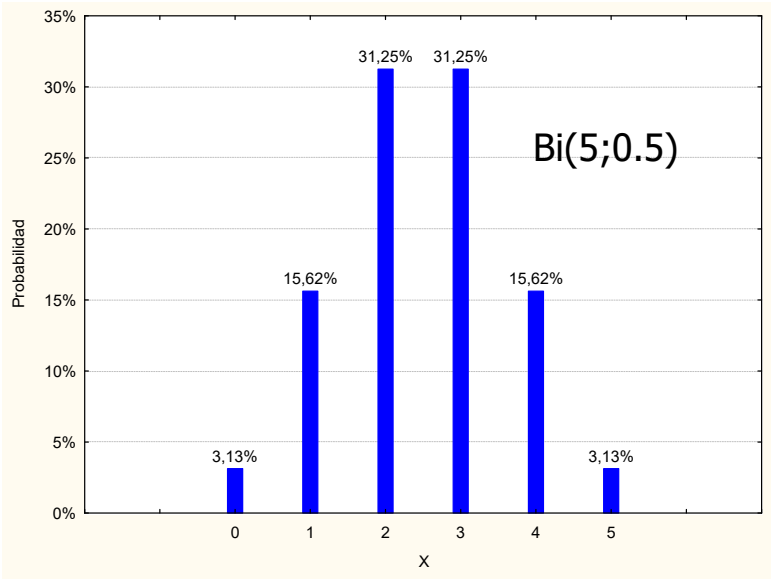
$$P(X = \mathbf{1}) = C_1^5 \;\; 0{,}2^1 \;\; 0{,}\mathbf{8}^4 = \mathbf{0{,}4096}$$

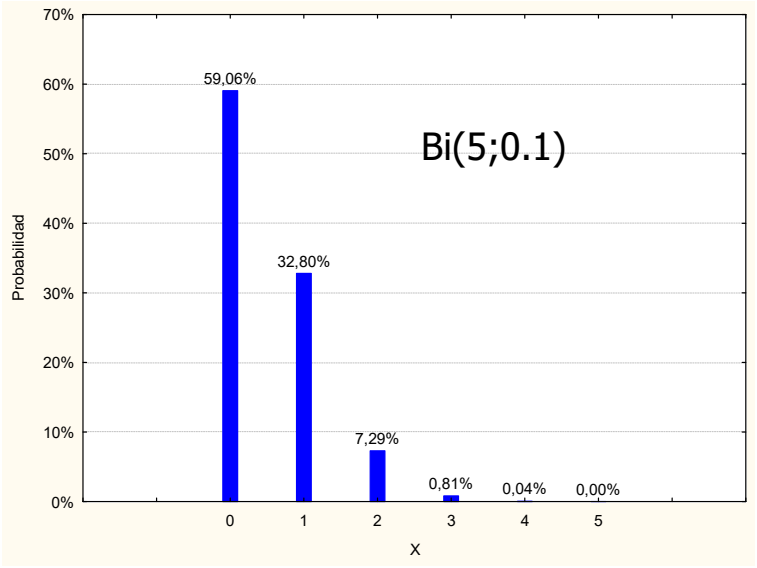
$$\mu = n \,.\, p = 5 \,.\, 0{,}2 = 1$$

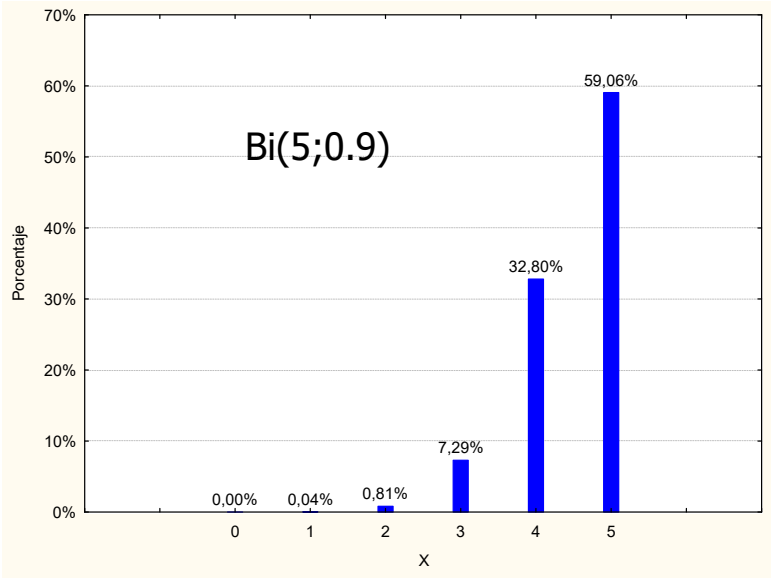
$$\sigma^2 = n \,.\, p \,.\, q = 5 \,.0{,}2 \,.0{,}8 = 0{,}8$$

X ~ B(*n;p*)


Bi(5;0.2)
Probabilidad
X
32,77%
40,96%
20,48%
5,12%
0,64%
0,03%


Bi(5;0.5)
Probabilidad
X
3,13%
15,62%
31,25%
31,25%
15,62%
3,13%


Bi(5;0.1)
Probabilidad
X
59,06%
32,80%
7,29%
0,81%
0,04%
0,00%


Bi(5;0.9)
Porcentaje
X
0,00%
0,04%
0,81%
7,29%
32,80%
59,06%

Distribución Poisson

- La distribución de Poisson también sirve como modelo para variables discretas de tipo conteo.
- A diferencia de la Binomial, donde el conteo se realizaba sobre *n* experimentos independientes, en el caso de la Poisson, los conteos se refieren al número de veces que un evento ocurre en una unidad de tiempo o espacio dados (horas, kilo, m^2, m^3, planta, etc.).
- Se puede presentar como una forma límite de la distribución Binomial en situaciones donde *p* es pequeño ($p \rightarrow 0$) y *n* muy grande o incluso imposible de determinar ($n \rightarrow \infty$).

Función de probabilidad

La función de probabilidad de una variable aleatoria X que se distribuye como una Poisson puede expresarse como:

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\ \lambda^{x}}{x!} & siendo \quad x = 0,1,\dots,n. \\ \\ 0\ en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Donde: e es una constante (base del logaritmo natural): 2,71828…

Como puede observarse desde la función, el **único parámetro de la distribución Poisson es λ**.

$$\mathbf{E(X) = V(X) = \lambda = n\ .\ p}$$

Ejercicio 3

- En un monte frutal durante un monitoreo de rutina se observa el número de ácaros presentes por hoja. Se conoce que el número medio de ácaros por hoja es 2,1. Se pregunta:

- Obtener la probabilidad de no hallar ningún ácaro por hoja.
- Calcular la probabilidad de encontrar menos de 2 ácaros por hoja.
- Obtener la varianza de la V.A.

Ejercicio 4

- En un monte frutal durante un monitoreo de insectos defoliadores se revisan 20 hojas y se encuentran:

X “Insectos por hoja”	0	1	2	3	4
f(x) N° de hojas	8	6	4	1	1

- Deducir a que distribución teórica se ajusta la V.A.
- Obtener la probabilidad para cada valor de la V.A.
- Calcular las Frecuencias Teóricas o esperadas si la V.A. se ajusta a la distribución deducida.