Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales | UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

CURSO DE INGRESO 2026
Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

CONTENIDO PREVIO

El material que sigue es para leer y resolver ANTES de comenzar el curso de ingreso de matemática para los ingresantes a las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal de la Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales de la Universidad Nacional de La Plata. Son contenidos que se dan a lo largo de la educación secundaria, pero puede estar con un nivel mayor de dificultad. Se aconseja no subestimar ésta unidad previa ya que de no tener dichos contenidos afianzados, no podrá ser factible el correcto desarrollo del curso.

Antes de empezar...

Al introducirnos en la lectura matemática, notaremos que los libros estarán repletos de símbolos, sobre todo, cuando hablamos de conjuntos. Para definir los conjuntos se usan las llaves $\{\}$, dentro de ellas se colocan los elementos que conforman el conjunto o bien su descripción.
Ejemplo:

$$A = \{\text{“}\textit{números naturales pares hasta el } 10\text{”}\}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

Cuando un elemento pertenece a un conjunto, se utiliza el símbolo $\in$, por ejemplo escribiendo $2 \in \mathbb{N}$, se lee “2 pertenece a los naturales”. También se pueden describir los conjuntos con condiciones matemáticas, por ejemplo

$$A = \left\{ \frac{2}{\mathrm{x}} \, tales\, que\, \mathrm{x} \in \mathbb{Z} \, y \, x \neq 0 \right\}$$

Lo que significaría que los números que pertenecen al conjunto, son todas las fracciones cuyo denominador es un número entero, siempre y cuando sea distinto de cero.

En general, cuando definimos conjuntos o reglas de conjuntos, no utilizamos números en concreto, si no letras que representan a cualquier número, en el caso del ejemplo anterior, si en vez de x utilizabamos un número, sólo estaríamos definiendo una única fracción, en cambio, al utlizar $x \in \mathbb{Z}$, estamos dando lugar a infinitas posibilidades.

Conjuntos numéricos y Operaciones elementales

Conjuntos numéricos

La **noción de número** es uno de los conceptos más antiguos de la humanidad y es de gran importancia en la vida cotidiana. Ya los pueblos primitivos utilizaban piedras para contar sus rebaños. Desde los primeros tiempos el hombre tuvo la necesidad de representar cantidades de lo que tenía para saber con qué contaba exactamente y poder negociar. De ahí surgió la necesidad de crear símbolos que representaran esas cantidades.

Estudiaremos cuatro conjuntos numéricos en particular, los números naturales, los números enteros, los números racionales o fraccionarios y los números reales.

Estos conjuntos numéricos han ido apareciendo a medida que la humanidad se ha visto en la necesidad de solucionar problemas y retos cada vez más complejos y más profundos.

Números Naturales ($\mathbb{N}$)

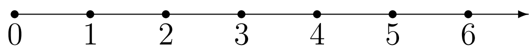
El primer conjunto numérico que analizaremos es el de los **números naturales**. Este es el conjunto de números que usamos para contar y lo representaremos con la letra **N**. Como conjunto podríamos representarlo de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$ [*]

Este conjunto tiene un primer elemento (el 0) y tiene un orden implícito, en el cual cada número es menor que los siguientes y mayor que los anteriores. Dado un número natural **n**, se define a su siguiente como **n+1**, y a su anterior como **n-1** (siempre que **n** no sea el cero).

¿Cuál es el último número natural? No hay, sencillamente no existe un número natural que sea más grande que todos los demás, ya que cada vez que pensamos en uno, podemos encontrar muchos que sean mayores que él (y por eso los puntos suspensivos en la notación de conjunto).

Este orden permite representar a los números naturales como puntos aislados sobre una recta. En su extremo izquierdo ubicamos al 0 y hacia la derecha, separados entre si en una misma distancia arbitraria, se encuentran el resto de los números, en orden creciente. Esto es:



Los número naturales se puden sumar y multiplicar. El resultado de estas operaciones es siempre un número natural. Pero la resta no siempre es posible con los elementos de este conjunto numérico. Por ejemplo, dado dos número naturales a y b, la resta b-a puede realizarse sólo si b es mayor que a.

Números Enteros ($\mathbb{Z}$)

Como dijimos, los números naturales no siempre pueden restarse. Por ejemplo $3 - 4$ no es una operación que se pueda realizar en $\mathbb{N}$. Fue necesario crear un nuevo conjunto numérico para describir este tipo de situaciones: *los números enteros negativos* $-1, -2, -3, -4, ...$. Éstos, junto a los naturales, forman lo que se conoce como

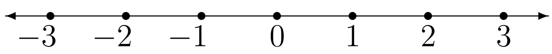
[*]Algunos matemáticos prefieren no incluir al 0 entre los números naturales, pero en este caso sí lo incluiremos para utilizarlo en muchas de las propiedades que enunciaremos.

el conjunto de los **números enteros** y lo representaremos con la letra $\mathbb{Z}$. Como conjunto podríamos representarlo de la siguiente forma:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Noten que este conjunto conserva la idea de orden que tenía el conjunto de los naturales, pero a diferencia de éste, no tiene un primer elemento ¿Por qué?.

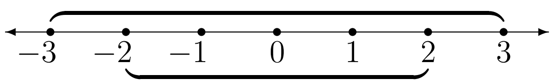
Podemos extender la representación gráfica del conjunto de la siguiente manera: en algún punto arbitrario de la recta colocamos el 0, hacia su derecha siguen estando los números naturales (que son enteros positivos) y a su izquierda agregamos los números negativos (cada uno separado una misma distancia arbitraria). Miren atentamente esta representación ¿Qué otras diferencias encuentran con la de los números naturales?



Opuesto

En esta representación, podemos ver que cada número tiene un par que le corresponde y está ubicado a la misma distancia del 0, pero del lado opuesto. Es lógico pensar en llamar a ese número su **opuesto** y lo representaremos como el mismo número, pero con un "−" adelante.

Es decir que dado un número entero a definimos a su opuesto como $-a$.



Actividad:

1. Discutan en grupo y respondan: ¿El opuesto de un número es necesariamente negativo? ¿Cuánto vale por ejemplo con el opuesto de -2?

2. Analicen la siguiente frase: *"Para cualquier $a \in \mathbb{Z}$ se sabe que $-a$ es siempre negativo"*. Decidir si es verdadera o falsa. Discutan en grupo por qué es verdadera o por qué es falsa.

Observación: El 0 es el único número que es igual a su opuesto (y por lo tanto puede decirse que no tiene signo, es decir que no es ni positivo ni negativo).

Números Racionales o Fraccionarios ($\mathbb{Q}$)

Hasta ahora hemos estudiado los número enteros y los naturales. Estos dos conjuntos de números tienen sus elementos *"separados"* entre si una misma distancia: la unidad. Es decir, se puede pasar de un entero a su siguiente sumándole 1 (o a su anterior restándole 1), pero no hay ningún otro número entero entre ambos.

Analicemos las siguientes situaciones:
Supongamos que disponemos de una bolsa de arena y la dividimos en dos partes iguales, decimos que cada parte es la mitad de la bolsa, es decir $\frac{1}{2}$ de la bolsa.
También podríamos pensar en el caso de que cortamos una pizza en 8 porciones iguales, cada porción es $\frac{1}{8}$ de la pizza, entonces si comemos 3 porciones estaríamos comiendo $\frac{3}{8}$ de la pizza.

Ante la necesidad de dividir a la unidad en porciones más pequeñas y representar matemáticamente estas nuevas cantidades, se definen los **números racionales** o **fracciones**.

Generalizando:

Suponiendo que tenemos una unidad y la dividimos en n partes iguales, cada parte es la enésima parte de la unidad y se simboliza como $\frac{1}{n}$.
Si tomamos m **de las enésimas partes**, decimos que esta cantidad es $\frac{m}{n}$.

El conjunto formado por todos los números enteros y todas las fracciones se llama **números racionales** y se representa con la letra $\mathbb{Q}$:

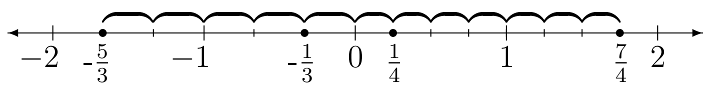
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \text{ tales que } m \text{ y } n \in \mathbb{Z}, \text{ con } n \neq 0 \right\}$$

$\boldsymbol{m}$ es el **numerador** y nos indica el número de partes elegidas. **Numerador**
$\boldsymbol{n}$ es el **denominador** que nos indica en cuántas partes se ha dividido a la unidad. **Denominador**
El **denominador** tiene que ser siempre **distinto de cero**.

Todo número racional puede escribirse también en **forma decimal**, ya sea con decimales **exactos** (es decir con parte decimal finita), como por ejemplo $\frac{3}{2} = 1,5$ o con decimales **periódicos** (que una determinada secuencia se repite indefinidamente), como por ejemplo $\frac{1}{3} = 0.\widehat{3} = 0{,}333333....$ **Forma decimal**

Podemos agregar los números racionales a la recta numérica, ahora entre dos núeros enteros habrá una de infinidad de números intermedios*. Para ubicar una fracción sobre esta recta tenemos que dividir a la unidad en la cantidad que indique el denominador y tomar tantas de estas partes como indique el numerador. Por ejemplo:

*Sin embargo todavía no estarán todos los puntos de la recta.



Fracciones equivalentes:

En general existen infinitas formas de representar una determinada fracción. Por ejemplo, si cortamos una pizza de la forma tradicional (8 porciones) cada porción representa $\frac{1}{8}$ de pizza. Ahora bien, si nos comemos 4 de estas porciones habremos comido $\frac{4}{8}$ de pizza, que es lo mismo que $\frac{1}{2}$ de pizza (media pizza).

Fracciones equivalentes

A todas las fracciones que representan un mismo número se las conoce como **fracciones equivalentes**. Para obtener fracciones equivalentes a partir de una fracción dada debemos multiplicar (o dividir) el numerador y el denominador por un mismo número (**Ojo: siempre distinto de 0**).

Actividad: Encuentren fracciones equivalentes de las siguientes fracciones ¿Cuántas hay?

$$\frac{3}{2} = \cdots \qquad ; \qquad \frac{5}{3} = \cdots \qquad ; \qquad \frac{-1}{4} = \cdots$$

Simplificación de una fracción

Fracciones irreducibles

Si en lugar de multiplicar se divide el numerador y el denominador por un mismo número también se obtienen fracciones equivalentes, pero a este proceso se lo conoce como **simplificación**. .

La simplificación puede seguirse hasta que el numerador y el denominador no tengan factores primos en común. A este tipo de fracciones se las conoce como **fracciones irreducibles**.

Dato útil: En general conviene trabajar con fracciones irreducibles, para que las cuentas sean más sencillas. Por lo tanto es recomendable **simplificar las fracciones antes** de realizar cualquier otra operación.

Actividad: Simplificar hasta obtener fracciones irreducibles.

$$\frac{16}{40} = \cdots \qquad ; \qquad \frac{32}{12} = \cdots \qquad ; \qquad \frac{75}{60} = \cdots$$

Aclaración: Si se cancela completamente el numerador, o el denominador, debe dejarse un 1 en su lugar. En el caso de que esto suceda en el denominador, no es necesario escribirlo, ya que las fracciones con denominador 1 son números enteros.

Ejemplos:

$$\frac{4}{12} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{12}}} = \frac{1}{3} \qquad\qquad \frac{30}{6} = \frac{\overset{5}{\cancel{30}}}{\underset{1}{\cancel{6}}} = \frac{5}{1} = 5$$

Números Reales

De a poco fuimos completando los diferentes conjuntos numéricos. Comenzamos con los naturales, luego incluimos sus opuestos (los enteros negativos) para formar los enteros, finalmente partimos en varias partes a cada uno de estos para generar las fracciones y así obtuvimos los números racionales.

Sin embargo, todavía la recta numérica no está completa, faltan incluir todos aquellos números que no se pueden expresar como cociente de enteros. A estos números se los conoce como **números irracionales** porque no se pueden expresar como una razón o cociente entre dos números enteros y se los representa con la letra $\mathbb{I}$.

Números irracionales

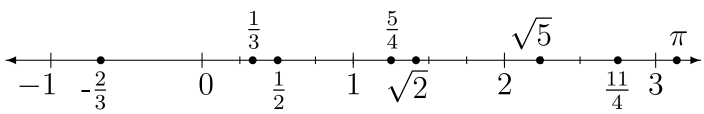
En la representación decimal, los **números irracionales** se caracterizan por tener infinitos decimales no periódicos, como por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309... \qquad ; \qquad \pi = 3,14159265358979323...$$

Los números irracionales junto a los números racionales forman el conjunto de los **números reales**. Este es el conjunto con el que trabajaremos de aquí en más en esta guía y a lo largo de la materia de *Matemática*. Al conjunto de los reales se lo representa con la letra $\mathbb{R}$.

Números reales

A este conjunto podremos ahora si representarlo como la recta numérica **completa**, donde cada punto de ésta corresponde a un número racional o irracional. A los números irracionales debemos ubicarlos en la recta de forma aproximada. Por ejemplo:



Descomposición en factores primos

Todo número natural se puede escribir de forma única como un producto de números primos. A este proceso se lo llama **descomposición en factores primos**, descomposición prima, descomposición factorial o a veces simplemente factorización.

Descomposición en factores primos

Para lograr esto se suele dividir al número sucesivamente por sus divisores primos (generalmente en orden creciente), hasta que el cociente sea 1. Una forma de hacerlo es la siguiente:

- Se coloca el número a descomponer, seguido de una gran raya vertical.
- Luego se lo divide por el primer divisor primo que le encontremos (anotándolo a la derecha de la raya vertical) y se anota el cociente debajo del número original.
- Dividimos ahora el cociente obtenido por el primer divisor primo que le encontremos y repetimos el proceso hasta que el cociente sea 1.
- Por último, la descomposición en factores primos del número buscado será el producto de todos los divisores que escribimos en la columna de la derecha.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{r|l} 60 & \\ & \\ & \\ & \\ & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & \\ & \\ & \\ & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & \\ & \\ & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & \\ & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}
$$

Por lo tanto $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y esa es su descomposición en factores primos.

Cálculo del Mínimo Común Múltiplo:

Mínimo Común Múltiplo

Se llama **mínimo común múltiplo** (que de ahora en más denotaremos MCM) de dos o más números naturales al menor número natural que es múltiplo de ellos. Para encontrar dicho número se puede seguir el siguiente método:

- Se encuentra la descomposición en factores primos de cada uno de los números.
- Se toma cada factor primo que aparezca en alguna de las descomposiciones (ya sea que esté repetido o no) elevado a su mayor exponente.

Ejemplo:

Para hallar el MCM entre 60, 8 y 18 (que podremos denotar como $\mathrm{MCM}(60, 8, 18)$) lo primero que hacemos es encontrar sus descomposiciones en factores primos:

$$
\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \\ & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ & \end{array}
$$

Por lo tanto:
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
$8 = 2^3$
$18 = 2 \cdot 3^2$

Los únicos factores primos que aparecen en estas descomposiciones son 2, 3 y 5. Además, el máximo exponente a que aparece elevado el 2 es 3, el máximo exponente a que aparece elevado el 3 es 2 y el máximo exponente a que aparece levado el 5 es 1. Por lo tanto:

$$\boxed{\text{MCM}(60, 8, 18) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360}$$

Aclaración: El MCM de dos o más números **nunca podrá ser menor que cualquiera de ellos**. A lo sumo podrá ser igual a alguno de ellos, si es que éste es múltiplo de todos los demás. Por ejemplo, el $\text{MCM}(2, 16, 8) = 16$, ya que 16 es múltiplo de 8 y de 2.

Operaciones Elementales

Suma

Como ya es sabido la operación de suma se utiliza para reunir a varios números en uno sólo. A cada número que forma parte de la suma se lo llama **sumando**. **Sumando**

Repasaremos antes de continuar con las demás operaciones las propiedades de la **suma**.

Propiedades de la suma

I Si a y $b \in \mathbb{R}$ entonces: $$\boldsymbol{a + b} \in \mathbb{R}$$

Es decir la suma de dos números reales da un número real.

Ejemplo: $$2 \;\text{ y }\; \frac{2}{3} \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \in \mathbb{R}$$

II Si a y $b \in \mathbb{R}$ entonces: $$\boldsymbol{a + b = b + a}$$ **Conmutativa**

Es decir el orden de los sumandos no altera a la suma.

Ejemplo:
$$\begin{aligned} -5 + 3 &= 3 + (-5) \\ -2 &= -2 \end{aligned}$$

III Si a, b y $c \in \mathbb{R}$ entonces: **Asociativa**

$$\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c}$$

Es decir que la forma en que se agrupen los sumandos no altera el resultado de la suma.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
(-7+3)+\frac{1}{2} &= -7+(3+\frac{1}{2}) &= -7+3+\frac{1}{2}\\
-4+\frac{1}{2} &= -7+\frac{7}{2} &= \frac{-14+6+1}{2}\\
-\frac{7}{2} &= -\frac{7}{2} &= -\frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Aclaración: Como consecuencia de la propiedad asociativa, pueden omitirse los paréntesis cuando se sumen varios números.

Elemento neutro (0)

IV Si $a \in \mathbb{R}$, entonces: $$\boldsymbol{a+0=a}$$

Es decir que cualquier número sumado a 0 da el mismo número.

Ejemplo: $$\sqrt{5}+0=\sqrt{5}$$

Opuesto

V Si $a \in \mathbb{R}$, entonces: $$\boldsymbol{a+(-a)=0}$$

Es decir que cualquier número sumado a su opuesto da como resultado 0.

Ejemplo: $$7,15+(-7,15)=0$$

Aclaración: Como consecuencia de esta propiedad se puede pensar a la resta como la suma de un opuesto. Una ventaja de esto es que al pensarlo así no es necesario definir una nueva operación (la resta) y que podemos utilizar todas las propiedades de la suma antes mencionadas.

Ojo: Si bien la resta no es conmutativa ($2-3 \neq 3-2$), la podemos pensar como la suma de un opuesto entonces si lo es, siempre y cuando mantengamos el signo acompañando al número que corresponde.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}c@{\quad}c@{\quad}rcl}
3-5 & \neq & 5-3 & \text{pero} & = & 3+(-5) & = & (-5)+3\\
-2 & \neq & 2 & & & -2 & = & -2
\end{array}$$

Actividad: Piensen y discutan con sus compañeros ejemplos que verifiquen cada una de las propiedades de la suma.

Suma y Resta de fracciones

Para sumar (o restar) dos números racionales podremos hacerlo de forma sencilla si ambos tienen **el mismo denominador** (ya que estaremos sumando "porciones del mismo tamaño"). **Suma y resta de fracciones**

Ejemplo: tres porciones de pizza más seis porciones de pizza son nueve porciones de pizza. Esta situación puede escribirse en notación de fracciones como:

$$\frac{3}{8} + \frac{6}{8} = \frac{3+6}{8} = \frac{9}{8}$$

Si queremos generalizar esto podríamos decir que si se tienen **dos fracciones de mismo denominador** (o sea $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$), entonces: **Suma de fracciones con mismo denominador**

$$\boldsymbol{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}}$$

Ahora bien, si tenemos **dos fracciones con diferente denominador** será necesario obtener fracciones equivalentes a éstas pero que tengan entre si el mismo denominador y así luego podremos sumarlas directamente.

Ejemplo:

Si se comieron tres porciones de pizza y luego un cuarto de pizza, no podemos sumar tres más uno para saber cuánto se comió, debemos **convertir** el cuarto de pizza a **porciones** antes de sumar. Como un cuarto de pizza equivale a 2 porciones de pizza, en total tendremos que se comieron 5 porciones de pizza.

Esta situación puede escribirse en notación de fracciones como:

$$\frac{3}{8} + \boldsymbol{\frac{1}{4}} = \frac{3}{8} + \boldsymbol{\frac{2}{8}} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$$

Para encontrar el denominador común que tienen las fracciones debemos usar el Mínimo Común Múltiplo (MCM) entre los denominadores de todas las fracciones de la suma (o resta).

Ejemplo:

Supongamos que queremos restar $\frac{5}{12}$ y $\frac{3}{16}$. Primero debemos encontrar la descomposición en factores primos de cada uno de los denominadores, para hallar el MCM$(12, 16)$. Esto es:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Por lo tanto:
$12 = 2^2 \cdot 3$
$16 = 2^4$

Entonces: $\text{MCM}(12, 16) = 2^4 \cdot 3 = 48$

Es decir que el denominador común de ambas fracciones es 48, o dicho de otra forma: debemos encontrar fracciones de denominador 48 que sean equivalentes a las que deseamos restar.

La resta queda:

$$\frac{5}{12} - \frac{3}{16} = \frac{20}{48} - \frac{9}{48} = \frac{20-9}{48} = \frac{11}{48}$$

Producto

Como sabemos, el producto de dos números es el resultado de sumar uno de los números tantas veces como indique el otro número. A cada uno de los números que se esán multiplicando se los denomina **factor**.

Factor

Ejemplo:

$$3 \cdot 4 = \underbrace{4+4+4}_{\text{3 veces}} = \underbrace{3+3+3+3}_{\text{4 veces}} = 12$$

Notación: Muchas veces en matemática se omite el símbolo "·" de la multiplicación (sobre todo cuando se trabaja con paréntesis o con letras). Es decir:

$$2 \cdot b = 2b \qquad\qquad 3 \cdot (x-a) = 3(x-a)$$

Propiedades del producto

Propiedades del producto

Cerrado

I Si a y $b \in \mathbb{R}$ entonces: $\boldsymbol{a \cdot b} \in \mathbb{R}$

Es decir el producto de dos números reales da un número real.

Ejemplo:

$$2 \;\text{ y }\; \frac{2}{3} \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \in \mathbb{R}$$

Conmutativo

II Si a y $b \in \mathbb{R}$ entonces: $\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$

Es decir el orden de los factores no altera el producto.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} -5 \cdot 3 & = & 3 \cdot (-5) \\ -15 & = & -15 \end{array}$$

III Si a, b y $c \in \mathbb{R}$ entonces: **Asociativo**

$$\boldsymbol{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c}$$

Es decir que la forma en que se agrupen los factores no altera el resultado del producto.

Ejemplo:
$$\begin{aligned} (-4 \cdot 3) \cdot \frac{1}{2} &= -4 \cdot (3 \cdot \frac{1}{2}) &&= -4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \\ -12 \cdot \frac{1}{2} &= -4 \cdot \frac{3}{2} &&= -\frac{12}{2} \\ -6 &= -6 &&= -6 \end{aligned}$$

Aclaración: Nuevamente como consecuencia de la propiedad asociativa, pueden omitirse los paréntesis cuando se multipliquen varios números.

IV Si $a \in \mathbb{R}$, entonces: $\boldsymbol{a \cdot 1 = a}$ **Elemento neutro (1)**

Es decir que cualquier número real multiplicado por 1 da el mismo número.

Ejemplo: $\sqrt{5} \cdot 1 = \sqrt{5}$

V Si a, b y $c \in \mathbb{R}$ entonces: **Distributiva respecto a la suma**

$$\boldsymbol{a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

Es decir para resolver el producto entre un número y una suma, es lo mismo primero resolver la suma y luego multiplicar, o bien primero multiplicar dicho número por ambos sumandos y luego sumar*.

Ejemplo:
$$\begin{aligned} \frac{2}{5}(1 - 6) &= \frac{2}{5} \cdot 1 - \frac{2}{5} \cdot 6 \\ \frac{2}{5}(-5) &= \frac{2}{5} - \frac{12}{5} \\ -2 &= -\frac{10}{5} \\ -2 &= -2 \end{aligned}$$

*Al proceso inverso de usar la propiedad distributiva se lo llama **sacar factor común**.

Inverso multiplicativo

VI Si $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, entonces:

$$\boldsymbol{a \cdot \frac{1}{a} = 1}$$

Es decir todo número real no nulo tiene un inverso multiplicativo y el resultado de multiplicar cualquier número (no nulo) por su inverso multiplicativo es 1.

Ejemplo:

$$7 \cdot \frac{1}{7} = 1$$

Actividad: Encuentren los inversos multiplicativos de $\frac{3}{4}$; -$\frac{5}{2}$ y de $\frac{1}{2}$. Luego discutan con sus compañeros: ¿Cuál es inverso multiplicativo de una fracción $\frac{a}{b}$ genérica?

Regla de los signos

VII El producto de dos números del mismo signo da número positivo, mientras que el producto de dos números de distinto signo es un número negativo.

Es decir:

Producto	Resultado
$+$ por $+$	$+$
$-$ por $-$	$+$
$+$ por $-$	$-$
$-$ por $+$	$-$

Notación: Cuando trabajamos con números negativos es esencial utilizar paréntesis de manera adecuada. Por ejemplo, si queremos escribir el producto de 2 por -3 se debe escribir:

$$\mathbf{2 \cdot (-3)} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{2(-3)}$$

Pero, para no confundirlo con una resta, **no** debe escribirse como:

$$\mathbf{2 \cdot -3}$$

Cuando en cambio el número negativo es el primero del producto pueden omitirse los paréntesis, es decir se puede escribir de cualquiera de las formas:

$$\mathbf{(-2) \cdot 3} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{-2 \cdot 3}$$

Actividad: Piensen y discutan con sus compañeros ejemplos que verifiquen cada una de las propiedades del producto.

Producto de fracciones

El producto de dos o más fracciones da como resultado una nueva fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores.

Producto de fracciones

Es decir:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$$

Ejemplos:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15} \qquad -\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{(-2) \cdot (-3)}{5 \cdot 5} = \frac{6}{25}$$

Esta definición nos permite establecer reglas para simplificar las fracciones *antes* de realizar el producto*. En este caso, como el nuevo numerador está formado por el producto de los numeradores y el nuevo denominador está formado por el producto de los denominadores, se puede **simplificar cualquier numerador con cualquier denominador**.

Regla de simplificación para el producto de fracciones

Actividad: Simplifiquen las siguientes fracciones y luego multipliquen:

$$\frac{8}{15} \cdot \frac{25}{12}$$

Ahora primero multipliquen y luego simplifiquen. Discutan con sus compañeros qué sucede con el resultado en ambos casos. ¿Cuál de los procedimientos les resultó mas simple?

Cálculo de Porcentajes

Una aplicación muy útil del producto de números racionales es para el cálculo de porcentajes, una operación muy común en la vida cotidiana. El porcentaje (por ejemplo 10 %, 25 %, 63 %, etc.) hace referencia a una proporción de algo. Es decir que siempre que hablemos de porcentaje debemos hacer referencia a la cantidad de la que estamos hablando. Por ejemplo no es lo mismo el 5 % de 240 que el 5 % de 3.000.000.

Cálculo de porcentajes

¿Cómo se calcula un porcentaje?

Para calcular porcentajes deberemos realizar el producto de un número racional (por ejemplo $\frac{12}{100}$ si quiseramos calcular el 12 % de alguna cantidad) por otro número (que es justamente dicha cantidad).

Generalizando:

*De todas formas nada nos impide realizar el producto y simplificar luego, pero generalmente es recomendable simplificar antes de hacer las cuentas, para trabajar con números menores.

Cálculo del X % de A

El X % de una cantidad A se calcula como:

$$\boxed{\frac{\text{X}}{\mathbf{100}} \cdot \text{A}}\,*$$

División

División en los Naturales

División en los Naturales

La división es una operación no del todo completa en el conjunto de los naturales, en el sentido de que no toda división entre dos naturales da como resultado un nuevo número natural.

Ejemplos:

6 dividido 3 es 2, pero 5 dividido 2 no se puede realizar en $\mathbb{N}$

Sin embargo, se puede definir el **algoritmo de la división**, que nos dará como resultado dos números naturales: el **cociente** y el **resto**.

Actividad: Discutan en grupo y recuerden: ¿cuál es el cociente y cuál es el resto en una división? Definan con sus palabras ambos conceptos.

Múltiplos:

Múltiplos

Se dice que un número a es múltiplo de b si se cumple que exite algún número entero K, tal que:

$$\boxed{\boldsymbol{a = K \cdot b}}$$

Divisibilidad:

Divisibilidad

Si el resto de la división de a dividido b es 0, se dice que a es **divisible** por b.

Observación: Si a es divisible por b, entonces también puede afirmarse que a es múltiplo de b.

Números primos:

*Muchos de ustedes tal vez estén acostumbrados a usar la regla de tres simple para calcular porcentajes (y es perfectamente válido siempre y cuando se use correctamente), pero esta forma de calcularlo es muy práctica, sobre todo para el planteo de ecuaciones, como veremos más adelante.

Un número natural (mayor que 1) se dice que es un **número primo** si es divisible sólo por 1 y por él mismo.

Números primos

Existen infinitos números primos, pero los primeros 10 números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

División en los Reales

La división entre dos números reales a y b puede interpretarse como el producto de a con el inverso multiplicativo de b, es decir $\frac{1}{b}$. Esta interpretación nos permite utilizar en la división todas las propiedades del producto.

Aclaración: La regla de los signos para la división es igual a la del producto. Es decir al dividir dos números de igual signo el resultado es positivo, mientras que si se dividen números de diferentes signos el resultado es negativo.

División de Fracciones

La existencia del inverso multiplicativo nos permite resolver la división como una multiplicación por el inverso del divisor*.

División de Fracciones

En otras palabras para dividir dos fracciones, debemos dar vuelta la segunda fracción y luego multiplicar normalmente:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$$

Esta forma de resolver una división de fracciones (como un producto) permite utilizar todas las propiedades vistas para el producto también en la división.

Ejemplos:

$$\frac{3}{7} : \frac{2}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{14} \qquad -\frac{2}{15} : \frac{3}{8} = -\frac{2}{15} \cdot \frac{8}{3} = -\frac{16}{45}$$

$$\frac{12}{25} : \frac{8}{15} = \frac{12}{25} \cdot \frac{15}{8} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{10}$$

*Probablemente hayas aprendido a realizar la división de fracciones como un producto cruzado, sin embargo esta forma que proponemos aquí nos permite realizar de manera más sencilla las simplificaciones antes de multiplicar como vimos en secciones anteriores.

Ejercicios

Ejercicios Capítulo Previo

En todos los ejericios resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

I Indicar todos los conjuntos numéricos (Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales, Reales) a los que pertenecen los siguientes números.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{9}$ c) $-0,\hat{6}$

II Dados los siguientes números: 0 ; $-0,125$; $\frac{2}{3}$; -1 ; -3 ; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{2}$

a) Ordenarlos de menor a mayor
b) Graficarlos en la recta numérica

III Resolver las siguientes operaciones con enteros. (No olvidar separar en términos)

a) $8 - 11 + (-3) + 12$ b) $(3 + 8)5 \cdot 2 + 9$ c) $-3(5 - 7) + 4(-3)$

d) $(2 - 5)(-8 + 3) - 3$ e) $3 \cdot (-2) - 4(3 + 2 - 8)$

IV Calcular las sumas y restas con fracciones.

a) $-\dfrac{4}{3} + 2 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)$ b) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5}$

c) $\dfrac{5}{6} - \dfrac{3}{8}$ d) $\left(\dfrac{2}{3} - 2\right) + \left(3 - \dfrac{1}{3}\right) - \left(\dfrac{5}{3} - 4\right)$

V Resolver las siguientes operaciones.

a) $\left(\frac{8}{7}-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{5}{9}$ b) $\frac{36}{24}\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)$ c) $\frac{15}{4}:\frac{25}{3}\cdot\frac{20}{27}$ d) $\frac{35/2}{5/4}\cdot\frac{3}{2}$

e) $\dfrac{\frac{8}{5}+\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}$ f) $\left(\frac{6}{7}:\frac{6}{21}-1\right)\frac{1}{2}+\frac{3}{7}:\frac{2}{14}-3$

g) $\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{11}+3\right)-2\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)$

VI Nuestro jefe nos dice que a partir del mes que viene vamos a tener un aumento del 15 % en nuestro salario (que actualmente es de $50000). ¿Cuánto vamos a cobrar a partir del mes que viene?

En caso que con la autoevaluación te hayas dado cuenta que necesitas un repaso más profundo, te recomendamos que hagas los ejercicios del 1 al 4, si sólo es practicar, podes comenzar a partir del ejercicio 5

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

CURSO DE INGRESO 2026

MATEMÁTICA

Material de apoyo para el curso de Nivelación de Matemática para los ingresantes a las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal de la Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales de la Universidad Nacional de La Plata.

Índice

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

MATEMÁTICA

Capítulo 1

Material de apoyo para el curso de Nivelación de Matemática para los ingresantes a las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal de la Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales de la Universidad Nacional de La Plata.

1. Conjuntos numéricos y Operaciones elementales

1.1. Potenciación

La potenciación de números reales se define como la multiplicación de un número real por si mismo una cierta cantidad de veces. Al número que estamos multiplicando se lo denomina **base** y al número que indica la cantidad de veces que se debe multiplicar se lo llama **exponente**.

Base y exponente

Ejemplo:

$$3^5 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5 \text{ veces}}$$

Que se lee: "tres elevado a la cinco" o "tres a la quinta".

En general, si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}^*$ se define la potencia n-ésima de a como:

Definición de potencia con exponente Natural

$$\boxed{\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}}}$$

Propiedades de la potencia

Propiedades del producto

I Si $a \in \mathbb{R}$ entonces: $\boldsymbol{a^1 = a}$

Exponente 1

Es decir todo número real elevado a la 1 es igual al mismo número.

II Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ entonces: $\boldsymbol{a^0 = 1}$

Exponente 0

Es decir todo número distinto de cero elevado a la 0 da 1.

III Si $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces:

Producto de potencias de igual base

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Es decir el producto de potencias de igual base es una nueva potencia, con la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes originales.

IV Si $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces:

Cociente de potencias de igual base

$$\boldsymbol{\frac{p^m}{p^n} = p^{m-n}}$$

Es decir el cociente de potencias de igual base es una nueva potencia, con la misma base, cuyo exponente es la resta de los exponentes originales.

---

*Si bien aquí se enuncian las propiedades de la potencia para $n \in N$, veremos más adelante que n puede ser cualquier número racional y estas propiedades siguen siendo válidas

Potencia de potencia

V Si $a \in \mathbb{R}$ y m, $n \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

Es decir la potencia de una potencia es una nueva potencia, con igual base, cuyo exponente es el producto de los exponentes.

Distributiva respecto al producto

VI Si a, $b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$\boldsymbol{(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m}$$

Es decir la potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores.

Distributiva respecto al cociente

VII Si a, $b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}}$$

Es decir la potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias del numerador y del denominador.

Exponente -1

VIII Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ entonces:

$$\boldsymbol{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

Es decir todo número distinto de cero elevado a la -1 es igual a su inverso multiplicativo.

Exponente negativo

IX Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Es decir si el exponte es negativo, entonces debe cambiarse la base por su inverso multiplicativo y el exponente por su opuesto.

Actividad: Piensen y discutan con sus compañeros ejemplos que verifiquen cada una de las propiedades de la potencia. Elijan valores negativos tanto para las **bases** como para los **exponentes** en algunos de dichos ejemplos.

<u>IMPORTANTE</u>: La potencia NO es distributiva respecto a la suma/resta

<u>Es decir</u>:

$$\boldsymbol{(a+b)^n \neq a^n + b^n} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{(a-b)^n \neq a^n - b^n}$$

Signo de la potencia

Aclaración: Debido a la regla de los signos para el producto se puede conocer el signo del resultado de una potencia en base al signo de la base y la paridad del exponente. Los exponentes pares darán siempre resultados positivos y los exponentes impares darán resultados que conservarán el signo de la base.

En resumen:

Base	Exponente	Resultado
$+$	par	$+$
$-$	par	$+$
$+$	impar	$+$
$-$	impar	$-$

Ejemplos:

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \qquad (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \qquad (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

<u>IMPOTANTE</u>: Es muy importante el correcto uso de los paréntesis, porque la presencia o no de ellos simboliza cosas diferentes. Es decir:

$$\boldsymbol{(a \cdot b)^n \neq a \cdot b^n} \qquad , \qquad \boldsymbol{(-a)^n \neq -a^n} \qquad , \qquad \boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n \neq \frac{a^n}{b}}$$

Ejemplos:

$$(\mathbf{2} \cdot \mathbf{3})^2 = (\mathbf{2} \cdot \mathbf{3}) \cdot (\mathbf{2} \cdot \mathbf{3}) = 6 \cdot 6 = 36 \ \ \textbf{no es lo mismo que} \ \ 2 \cdot \mathbf{3}^2 = 2 \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{3} = 2 \cdot 9 = 18$$

$$(\mathbf{-3})^2 = (\mathbf{-3}) \cdot (\mathbf{-3}) = 9 \ \ \textbf{no es lo mismo que} \ \ -\mathbf{3}^2 = -(\mathbf{3} \cdot \mathbf{3}) = -9$$

$$\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^2 = \frac{4}{9} \ \ \textbf{no es lo mismo que} \ \ \frac{\mathbf{2}^2}{3} = \frac{4}{3}$$

1.2. Radicación

La radicación es la operación inversa de la potencia y formalmente se define como:

Dados $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$, se define:

$$\boxed{\boldsymbol{\sqrt[n]{a} = b \quad \textbf{si y solo si} \quad b^n = a}}$$

Es decir, dado un núnmero real a y un número natural n mayor a 1, la raiz enésima de a es igual a b, si se cumple que $b^n = a$. En esta operación $\boldsymbol{a}$ se llama **radicando**, $\boldsymbol{n}$ es el **índice** de la raíz y $\boldsymbol{b}$ el resultado. **Radicando e índice**

Ejemplo

Para calcular $\sqrt[3]{\mathbf{8}}$ (que se lee como "raíz cúbica de 8") debemos pensar en un número que elevado a la 3 de como resultado 8, es decir que el resultado es **2**.

Aclaración Importante: Debido a la regla de los signos de la potencia (pág.24) se deben tener en cuenta algunas consideraciones respecto de la definición antes formalizada, dependiendo de si el índice de la raíz ($\boldsymbol{n}$) es **par** o **impar**.

Raíz de índice par

- **Si $\boldsymbol{n}$ es par:** el radicando $\boldsymbol{a}$ debe ser **positivo***. Además el resultado $\boldsymbol{b}$ será **siempre positivo**.

Raíz de índice impar

- $\boldsymbol{n}$ **es impar:** tanto el radicando $\boldsymbol{a}$ como el resultado $\boldsymbol{b}$ pueden ser cualquier número real (**positivo** o **negativo**).

Ejemplos:

$$\sqrt{9} = 3 \ \ \textbf{ya que} \ \ 3^2 = 9 \qquad \sqrt[4]{16} = 2 \ \ \textbf{ya que} \ \ 2^4 = 16$$

$$\sqrt[3]{125} = 5 \ \ \textbf{ya que} \ \ 5^3 = 125 \qquad \sqrt[5]{-32} = -2 \ \ \textbf{ya que} \ \ (-2)^5 = -32$$

Aclaración: Las **raíces de índice par de números reales negativos no existen** en $\mathbb{R}$, ya que ningún número real elevado a una potencia par da como resultado un número negativo. Sin embargo las **raíces de índice impar** están bien definidas tanto para números positivos como negativos y el resultado conserva el signo del radicando.

Notación: Por convención en las raíces de índice 2 (llamadas raíces cuadradas) se omite de escribir el índice en la raíz. Es decir: $\boldsymbol{\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}}$.

Propiedades de las raíces

Propiedades de las raíces

Distributiva respecto al producto

I Si a y $b \in \mathbb{R}$ (positivos si n es par) y $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

Es decir la raíz es distributiva respecto al producto.

Distributiva respecto al cociente

II Si a y $b \in \mathbb{R}$ (positivos si n es par) $b \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Es decir la raíz es distributiva respecto al cociente.

Raíces y potencias del mismo orden

III Si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces:

- **Si $\boldsymbol{n}$ es par**: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^n} = |a|}$
- **Si $\boldsymbol{n}$ es impar**: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^n} = a}$

Es decir que si tenemos una raíz de una potencia de un mismo orden podemos "cancelarlas" de alguna forma. Si n es impar, podemos cancelarlas directamente. En cambio si el índice es par se obtiene el valor absoluto del radicando, ya que **las raíces de índice par siempre dan un resultado positivo**.

*Esto es cierto ya que no existen números reales que elevados a una potencia par den como reultados un número negativo (ver reglas de los signos de la potencia en pág. 24)

IV Si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$ **Raíces como potencias fraccionarias**

Es decir que una raíz se puede expresar como una potencia fraccionaria, donde el índice de la raíz es el denominador del exponente.

Aclaración: Gracias a que las raíces se pueden expresar como potencias fraccionarias, se pueden aplicar todas las propiedades de la potencia a las raíces.

V Si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces: **Raíces y potencias**

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}}$$

Es decir que se puede escribir cualquier combinación de raíces y potencias como una única potencia de exponente fraccionario.

Ejemplos:

$$\sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2^3} = 2 \qquad \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$$

$$\sqrt{(-3)^2} = 3 \qquad \sqrt[5]{-3} = (-3)^{\frac{1}{5}} \qquad \sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^3} = -\frac{2}{3}$$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2^{-\frac{2}{5}} \qquad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \qquad \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$$

Actividad: Para cada uno de los ejemplos anteriores determinar qué propiedad fue necesaria para cada paso de la resolución (identifiquen todos los pasos requeridos para la resolción de cada ejemplo).

<u>IMPORTANTE</u>: La raíz no es distributiva respecto a la suma o resta

<u>Es decir</u>:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$$

Actividad: Calcular $\sqrt{4+9}$ y $\sqrt{4} + \sqrt{9}$. Comparar ambos resultados.

Racionalización:

Muchas veces en matemática, cuando tenemos una expresión con una raíz en el denominador, se realiza una operación para obtener una fracción equivalente, pero con denominador entero. Esta operación se conoce como **racionalización**.

Ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

1.3. Cálculos combinados

En general las **operaciones elementales** aparecen combinadas entre sí, es decir en una cuenta pueden combinarse varias sumas, productos, potencias y raíces, por eso se llaman **cálculos combinados**.

Para operar correctamente con ellas es de suma importancia saber identificar **términos** y **factores** en la expresión.

Término
Factor

Se llama **término** a cada una de las partes que se encuentran separadas por sumas o restas. Se llama **factor** a cada elemento que forma parte de un producto.

Ejemplos:

$\mathbf{12 + 17 \cdot 5 + 8} \rightarrow$ tiene **tres términos** y el segundo término tiene dos factores.

$\mathbf{2 \cdot (3 + 6 + 2)} \rightarrow$ así escrita tiene **un sólo** término compuesto de dos factores.

Observación: En matemática es importante el correcto uso de los paréntesis, ya que a veces la presencia (o ausencia) de los mismos puede simbolizar expresiones muy diferentes. Por ejemplo:

$$3 \cdot (2+4) + 1 = \overbrace{3 \cdot (2+4)} + \overbrace{1} = 19$$

$$3 \cdot 2 + 4 + 1 = \overbrace{3 \cdot 2} + \overbrace{4} + \overbrace{1} = 11$$

En los cálculos combinados las operaciones matemáticas tiene un orden de prioridad que hay que respetar al realizar los cálculos. En caso de que existan paréntesis, corchetes o algún otro tipo de agrupación, deberá respetarse el orden de éstos, operando de "adentro hacia afuera". Si no hay paréntesis o corchetes, o bien dentro de cada paréntesis, el orden en que deben realizarse las operaciones es el siguiente:

1° Potencias (o raíces)

2° Productos (o divisiones)

3° Sumas (o restas)

Para no cometer errores al resolver cálculos combinados es necesario p**rimero separar en términos**, luego resolver cada término y por último realizar las sumas o restas de los resultados.

Ejemplos:

$$2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 = \overbrace{2 \cdot 3} + \overbrace{5 \cdot 2} + \overbrace{2 \cdot 4} + \overbrace{1} = 6 + 10 + 8 + 1 = \boxed{25}$$

$$(1+5) \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 7 = \overbrace{\mathbf{(1+5)} \cdot 2} + \overbrace{4 \cdot 3} + \overbrace{7} = \overbrace{\mathbf{6} \cdot 2} + \overbrace{4 \cdot 3} + \overbrace{7} = 12 + 12 + 7 = \boxed{31}$$

1.4. Notación científica

La notación científica es una manera de representar un número utilizando potencias de base diez. Se utiliza para poder expresar números muy grandes o muy pequeños.

Los números se escriben como un producto:

$$a \times 10^n \qquad \text{o} \qquad a \cdot 10^n \qquad \text{o} \qquad a\ 10^n$$

donde: a es un número real mayor o igual que 1 y menor que 10 o mayor que -10 y menor o igual que -1, que recibe el nombre de **coeficiente** y n es un número entero, que recibe el nombre de exponente u **orden de magnitud**.

Ejemplos:

$$5,25\ 10^4 \qquad 6,023 \cdot 10^{23} \qquad -2,233\ 10^3 \qquad 9 \times 10^{-9}$$

Aclaración: Expresiones como $12,05 \times 10^6$, $0,23\ 10^{-2}$ o $-34,55 \cdot 10^3$ no entrarían dentro de la definición formal de notación científica (ya que el coeficiente no cumple con los requerimientos que impone la definición), pero en la práctica podrían resultar igualmente útiles.

Algunas potencias de 10

Cuando los exponentes son mayores o iguales que cero

10^0	=	1
10^1	=	10
10^2	=	100
10^3	=	1000
10^4	=	10000
10^5	=	100000
10^{10}	=	10000000000
10^{20}	=	100000000000000000000

Cuando los exponentes son menores que cero

10^{-1}	=	$1/10$	=	0,1
10^{-2}	=	$1/10^2$	=	0,01
10^{-3}	=	$1/10^3$	=	0,001
10^{-4}	=	$1/10^4$	=	0,0001
10^{-5}	=	$1/10^5$	=	0,00001
10^{-10}	=	$1/10^{10}$	=	0,0000000001
10^{-20}	=	$1/10^{20}$	=	0,00000000000000000001

Algunos datos en forma tradicional (aproximados)

La masa de la tierra es de $5980000000000000000000000\ kg$

La masa del electrón es de $0,000000000000000000000000000000911\ kg$

El número de Avogadro es 602000000000000000000000 partículas/mol

La velocidad de la luz en el vacío es $299790000\ m/s$

La longitud de una célula típica es $0,000050\ m$

La longitud de onda de la luz amarilla es $0,000000589\ m$

Los datos anteriores expresados en notación científica

La masa de la tierra es $5,98\ 10^{24}\ kg$

La masa del electrón es $9,11\ 10^{-31}\ kg$

El número de Avogadro es $6,02\ 10^{23}$ partículas/mol

La velocidad de la luz en el vacío es $2,9979\ 10^{8}\ m/s$

La longitud de una célula típica es $5\ 10^{-5}\ m$

La longitud de onda de la luz amarilla es $5,89\ 10^{-7}\ m$

Producto y cociente de números expresados en notación científica

La notación científica es especialmente práctica a la hora de realizar productos o cocientes de números expresados de esta forma, ya que se opera por un lado con los coeficientes (realizando la operación adecuada) y por otro lado con las potencias de 10 (utilizando las propiedades de la potencia).

$$4,3\ 10^{3} \cdot 2\ 10^{5} = 8,6\ 10^{8} \qquad \frac{8,1\ 10^{-6}}{3\ 10^{2}} = 2,7\ 10^{-8}$$

Suma y resta de números expresados en notación científica

Exponentes iguales Si se suman números del mismo orden de magnitud:

- Se suman los coeficientes, si la suma es mayor o igual que 1 y menor que 10 (o mayor que -10 y menor o igual que -1) se mantiene el mismo orden de magnitud

  $$3,2\ 10^{12} + 4,9\ 10^{12} = 8,1\ 10^{12}$$
  $$8,9\ 10^{-10} - 2,7\ 10^{-10} = 7,2\ 10^{-10}$$
  $$-1,4\ 10^{3} - 2,5\ 10^{3} = -3,9\ 10^{3}$$

- Se suman los coeficientes, si la suma es mayor o igual que 10 (o menor o igual que -10 o se encuentra entre -1 y 1), se convierte el coeficiente a notación científica sumando el orden de magnitud del coeficiente al orden de magnitud original.

  $$3,2\ 10^{12} + 8,9\ 10^{12} = 12,1\ 10^{12} = 1,21\ 10^{1}\ 10^{12} = 1,21\ 10^{13}$$
  $$5,2\ 10^{-3} - 6\ 10^{-3} = -0,8\ 10^{-3} = -8\ 10^{-1}\ 10^{-3} = -8\ 10^{-4}$$

Exponentes distintos Se expresan los números con el orden de magnitud mayor y se suman los coeficientes como en los casos anteriores.

$4\ 10^6 + 3\ 10^8 = 0,04\ 10^8 + 3\ 10^8 = 3,04\ 10^8$
$5\ 10^{-7} - 4\ 10^{-8} = 5\ 10^{-7} - 0,4\ 10^{-7} = 4,6\ 10^{-7}$
$3,2\ 10^{-7} - 5,9\ 10^{-5} = 0,032\ 10^{-5} - 5,9\ 10^{-5} = -5,868\ 10^{-5}$
$9,9\ 10^5 + 3\ 10^4 = 9,9\ 10^5 + 0,3\ 10^5 = 10,2\ 10^5 = 1,02\ 10^6$

1.5. Logaritmos

El logaritmo es una operación que se define para los números reales positvos de la siguiente manera:

1.5.1. Definición

Dados los números reales $N > 0$, $b > 0$ con $b \neq 1$ y c, Se define el logaritmo como: **Definición de logaritmo**

$$\boldsymbol{\log_b N = c \quad \Leftrightarrow \quad b^c = N}$$

Que se lee: el logatirmo en base b de N es igual c si y solo si b elevado a la c es igual a N.

$\boldsymbol{b}$ es la **base** del logaritmo . **Base, argumento y resultado**

$\boldsymbol{N}$ es el **argumento** del logaritmo.

$\boldsymbol{c}$ es el **resultado** del logaritmo.

Ejemplos: Calcular los siguientes logaritmos:

$\log_5 125 =$ $\qquad \log_2 1/2 =$ $\qquad \log_{25} 5 =$

$$\begin{array}{lcll}
\log_5 125 & = & & \longrightarrow \text{ Buscamos a qué potencia debemos elevar el 5 para obtener 125} \\
\log_5 125 & = & \log_5(5^3) & \longrightarrow \text{ Escribimos el 125 como una potencia de 5} \\
\log_5 125 & = & 3 & \longrightarrow \text{ El resultado es 3 porque } 5^3 \text{ es 125}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcll}
\log_2(1/2) & = & & \longrightarrow \text{ Buscamos a qué potencia debemos elevar el 2 para obtener } \dfrac{1}{2} \\
\log_2(1/2) & = & \log_2(2^{-1}) & \longrightarrow \text{ Escribimos el } \dfrac{1}{2} \text{ como una potencia de 2} \\
\log_2(1/2) & = & -1 & \longrightarrow \text{ El resultado es } -1 \text{ porque } 2^{-1} \text{ es } \frac{1}{2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcll}
\log_{25} 5 & = & \log_{25}\sqrt{25} & \longrightarrow \text{ Sabemos que } \sqrt{25} = 5 \\
\log_{25} 5 & = & \log_{25}(25^{\frac{1}{2}}) & \longrightarrow \text{ También sabemos que } \sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} \\
 & & & \longrightarrow \text{ Ya pudimos escribir al 5 como una potencia de 25} \\
\log_{25} 5 & = & \frac{1}{2} & \longrightarrow \text{ el resultado es } \frac{1}{2} \text{ porque } 25^{\frac{1}{2}} \text{ es 5}
\end{array}$$

Bases especiales

Observación: En general cuando se desea calcular el logaritmo en **base 10** se omite especificar la base y se escribe simplemente **log**.

Ejemplo: Calcular el siguiente logaritmo: $\log 1000$

$$\log 1000 = \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$$

1.5.2. Propiedades del Logaritmo

Dados los números reales a, b, m y n, todos mayores que cero y además $b \neq 1$:

Logaritmo de un producto

I **Logaritmo de un producto**

$$\boldsymbol{log_b\,(n.m) = \log_b n + \log_b m}$$

En palabras: El logaritmo de un producto puede escribirse como una suma de los logaritmos de los factores.

Logaritmo de un cociente

II **Logaritmo de un cociente**

$$\boldsymbol{log_b \left(\frac{n}{m}\right) = \log_b n - \log_b m}$$

En palabras: El logaritmo de un cociente es igual a la resta entre el logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.

Logaritmo de una potencia

III **Logaritmo de una potencia**

$$\boldsymbol{log_b\, a^n = n \log_b a}$$

En palabras: El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

Fórmula del cambio de base

IV **Cambio de base de un logaritmo**

$$\boldsymbol{\log_b a = \frac{\log_n a}{\log_n b}}$$

Esta propiedad permite calcular cualquier logaritmo en base b mediante otros logaritmos en cualquier otra base n.

A veces es necesario combinar varias propiedades para poder realizar una operación con logaritmos de forma más sencilla.

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\log_3 \frac{81 \cdot 9^5}{\sqrt{27}} &= \log_3 81 \cdot 9^5 - \log_3 \sqrt{27} && \rightarrow \quad \text{Propiedad del Cociente} \\
&= \log_3 81 + \log_3 9^5 - \log_3 27^{\frac{1}{2}} && \rightarrow \quad \text{Propiedad del Producto} \\
&= \log_3 81 + 5 \log_3 9 - \frac{1}{2} \log_3 27 && \rightarrow \quad \text{Propiedad de la Potencia} \\
&= 4 + 5 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 && \rightarrow \quad \text{Definición de Logaritmo} \\
&= 4 + 10 - \frac{3}{2} = \frac{25}{2}
\end{aligned}
$$

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

MATEMÁTICA

Capítulo 2

Material de apoyo para el curso de Nivelación de Matemática para los ingresantes a las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal de la Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales de la Universidad Nacional de La Plata.

2. Expresiones algebraicas

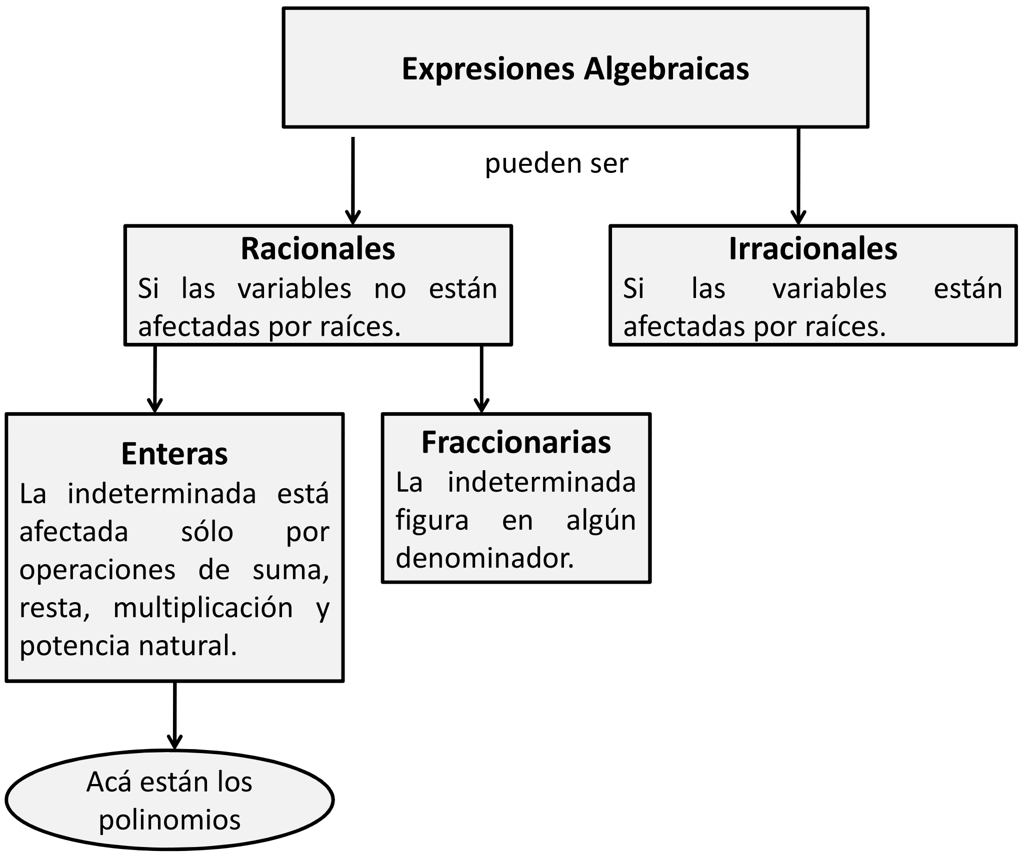
Llamaremos **expresiones algebraicas** a expresiones compuestas por números y letras relacionadas entre si por las operaciones básicas. Las letras a las que aquí nos referimos se llaman *indeterminada* o *variable* y en general se utiliza la letra x, pero podría utilizarse cualquier otra letra.

Definición de Expresiones Algebraicas

Ejemplos de expresiones algebraicas:

$$x^2 + 2xy \qquad \frac{xy - 2x}{x^2 + 1} \qquad x^3 + 4x^2 - 5x + 2$$

¿Qué tipos de Expresiones Algebraicas existen?



2.1. Polinomios

Las expresiones algebraicas más utilizadas son los **Polinomios**.

¿Pero qué son los polinomios?

Si prestamos atención a la etimología de la palabra **polinomio**, vemos que *poli-* significa «muchos» y *-nomios* en este caso se refiere a «términos», es decir que **polinomios** significa «muchos términos».

Los polinomios están formados de

- **constantes**, es decir número reales.
- **variables**, como x e y
- **exponentes**, aplicados a las variables y que sólo pueden ser **enteros positivos**.

Definición Formal de Polinomios:

Definición de Polinomios

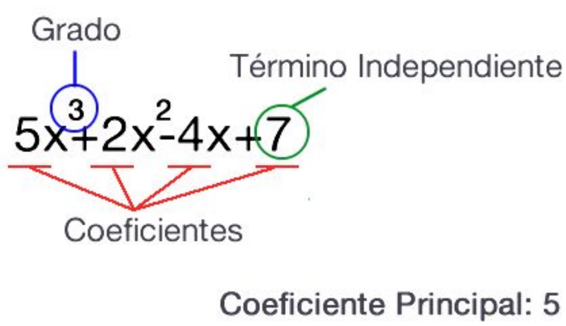
Si $a_0,\ a_1,\ a_2, \cdots a_n$ son números reales y n es un número natural, se llama **Polinomios** a toda expresión algebraica que tenga la forma:

$$\boldsymbol{P(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

Elementos de un Polinomio:

- **Variable:** es la indeterminada (en general x o y). Los polinomios pueden tener más de una indeterminada o variable, pero en este curso estudiaremos polinomios con una sola variable.
- **Coeficientes:** son los números reales que multiplican a la variable.
- **Exponentes:** como dijimos antes los exponentes de la variable deben ser siempre números **enteros positivos**.
- **Grado:** es el mayor de los exponentes.
- **Coeficiente principal:** es el coeficiente que acompaña a la variable de mayor exponente.
- **Término independiente:** Es el término que no tiene variable (también se puede decir que tiene la variable x elevada a la potencia 0.

En el siguiente ejemplo se indican los elementos de un Polinomio:



Ejemplos de Polinomios:

$$5x^3 - x^2 - 2x + 3 \qquad \frac{1}{3}x^2 \qquad x^3 + 4x^2 - 5x + 2$$

Notación: A los Polinomios en la indeterminada x se los simboliza con letras mayúsclas indicando la indeterminada entre paréntesis: $\boldsymbol{P(x)}$; $\boldsymbol{Q(x)}$; $\boldsymbol{R(x)}$.

A continuación se dan algunas definiciones que serán de utilidad para el estudio de Polinomios

Definición 1:

Se llama **polinomio nulo** al polinomio con todos sus coeficientes iguales a cero. Es decir: $O(x) = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$. El polinomio nulo no tiene grado. **Polinomio Nulo**

Definición 2:

Se llama polinomio **opuesto** de $P(x)$ al polinomio $-P(x)$. **Polinomio Opuesto**

Ejemplo:

Dado $\boldsymbol{P(x) = 3x^2 + 2x - 5}$, su polinomio opuesto es: $\boldsymbol{-P(x) = -3x^2 - 2x + 5}$.

Definición 3:

Se llama **monomio** a los polinomios que tienen un sólo término, **binomios** a los que tienen dos términos y **trinomios** a los que tienen tres términos .

Actividad: Decidir cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son Polinomios y cuáles no. Indentificar (cuando corresponda) grado, término independiente, coeficiente principal y si son monomios, binomios o trinomios.

$$\frac{1}{3}x^2 + 1 \qquad 2\sqrt{x} + 1 \qquad x^{-3} + 4x^2$$

$$\sqrt{5}x^2 + 1 \qquad 4 \qquad 2x^3 - 7x^2 + 3\ \frac{1}{x}$$

Definición 4:

Se llama **valor numérico** de un Polinomio al número que se obtiene al reemplazar la indeterminada (x) por cualquier número real*. **Valor Numérico**

Simbólicamente:
Dado

$$\boldsymbol{a \in \mathbb{R}:} \quad \boldsymbol{P(a)} \text{ es el } \textbf{valor numérico} \text{ de } \boldsymbol{P(x)}$$

*Como la indeterminada puede reemplazarse por cualquier número, un polinomio tiene infinitos valores numéricos.

Actividad: Dado $P(x) = 2x^2 - 3x + 6$, encontrar los valores numérico $P(0)$ y $P(2)$.

Definición 5:

Raíz de un polinomio

Se llama **raíz** de un polinomio $P(x)$ a cualquier número $a \in \mathbb{R}$ que al reemplzarlo por la variable x el valor numérico $P(a)$ de cero.

Simbólicamente:

$$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R} \text{ es raíz de } \boldsymbol{P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0}$$

Ejemplo:

Dado $\boldsymbol{P(x) = 3x^2 + 2x - 5}$, se verifica que $\boldsymbol{a = 1}$ es raíz de $\boldsymbol{P(x)}$, pues $\boldsymbol{P(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = 0}$.

2.1.1. Operaciones con polinomios

Ya que cada símbolo de un Polinomio representa a un número real podemos usar para operar con Polinomios las propiedades de las operaciones con números rales.

Suma y Resta

La **suma** de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene **agrupando los términos del mismo grado** y sumando sus coeficientes.

Ejemplo:

Si $P(x) = 2x^2 + 4x + 1$ y $Q(x) = x^4 - 5x^2 + 2$ entonces:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (2x^2 + 4x + 1) + (x^4 - 5x^2 + 2) \\ &= x^4 + 2x^2 - 5x^2 + 4x + 1 + 2 \\ &= x^4 + (2 - 5)x^2 + 4x + (1 + 2) \\ &= x^4 - 3x^2 + 4x + 3 \end{aligned}$$

La **resta** entre $P(x)$ y $Q(x)$ es equivalente a sumar a $P(x)$ el opuesto de $Q(x)$. Es decir:

$$\boldsymbol{P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]}$$

Ejemplo:

Dados los mismos polinomios del ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (2x^2 + 4x + 1) - (x^4 - 5x^2 + 2) \\ &= 2x^2 + 4x + 1 - x^4 + 5x^2 - 2 \\ &= -x^4 + 2x^2 + 5x^2 + 4x + 1 - 2 \\ &= -x^4 + (2 + 5)x^2 + 4x + (1 - 2) \\ &= -x^4 + 7x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$$

Multiplicación de Polinomios

Para **multiplicar** dos Polinomios se debe realizar una doble distributiva.Es decir se multiplica cada término de uno de los polinomios por todos los términos del otro, y luego se suman los coeficientes de los términos de igual grado, aplicando las propiedades del producto, de la suma y de la potencia vistas en el capítulo anterior.

Ejemplo:

$$\text{Si} \quad P(x) = x - 2 \quad \text{y} \quad Q(x) = 2x^2 + 3x - 1 \quad \text{entonces:}$$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (x-2) \cdot (2x^2 + 3x - 1) \\ &= x \cdot (2x^2 + 3x - 1) - 2 \cdot (2x^2 + 3x - 1) \\ &= x \cdot 2x^2 + x \cdot 3x + x \cdot (-1) - 2 \cdot 2x^2 - 2 \cdot 3x - 2 \cdot (-1) \\ &= 2x^3 + 3x^2 - 1x - 4x^2 - 6x + 2 \\ &= 2x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 1x - 6x + 2 \\ &= 2x^3 + (3-4)x^2 + (-1-6)x + 2 \\ &= 2x^3 - x^2 - 7x + 2 \end{aligned}$$

División de Polinomios

Dados dos polinomios $P(x)$ y $D(x)$ (con $D(x) \neq 0(x)$), es posible definir la división $P(x) \div D(x)$, de la que se obtienen dos nuevos polinomios: $C(x)$ (**polinomio cociente***) y $R(x)$ (**resto**), tal que:

$$P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$$

El resto de la división (polinomio $R(x)$) será siempre un polinomio de menor grado de $D(x)$ o bien $R(x) = 0$.

Si $R(x) = 0$ se dice que $P(x)$ es **divisible** por $D(x)$. En este caso se puede escribir: **Divisibilidad**

$$P(x) = D(x) \cdot C(x) \ \text{ o también } \ C(x) = \frac{P(x)}{D(x)}$$

Regla de Ruffini

Es un procedimiento sencillo que permite hallar el cociente y el resto de una división de Polinomios en **el caso en que el divisor sea un polinomio de la forma $\boldsymbol{x - a}$**, dónde $\boldsymbol{a}$ puede ser cualquier número real. .

*Este es al que normalmente se lo llama resultado de la división

Ejemplo:

Sean $\quad P(x) = 2x^3 - x^2 + 5 \quad$ y $\quad D(x) = x + 2$

Regla de Ruffini

Para aplicar correctamente la Regla de Ruffini, lo primero que debe hacerse es **ordenar con sus potencias de mayor a menor el polinomio $\boldsymbol{P(x)}$** y **agregar 0** para completar el Polinomio (es decir que aparezcan todos los exponentes):

$$\boldsymbol{P(x) = 2x^3 - x^2 + 0x + 5}$$

Coeficientes de $P(x) \rightarrow$		**2**	**-1**	**0**	**5**
Opuesto del término independiente de $D(x) \rightarrow$	**-2**		-4	10	-20
		2	-5	10	$\boxed{-15}$

Una vez que se ordenó y se completó con ceros el polinomio $P(x)$ se arma el cuadro como se muestra en el ejemplo. El número que se agrega en el ángulo izquierdo (**el** -2 **en el ejemplo**) es el opuesto de del término independiente del divisor, es decir de $D(x)$ en nuestro caso.

Luego comienza el procedimiento:

I Se baja el primer coeficiente de $P(x)$ (**el** 2 **en el ejemplo**).

II Se multiplica dicho coeficiente por el número del ángulo izquierdo (**el** -2 **en el ejemplo**).

III Se coloca el resultado de dicha multiplicación en la siguiente columna (**el** -4 **en el ejemplo**).

IV Se suman los números que quedaron en la primera y en la segunda fila y el resultado se escribe abajo, al lado del número que bajamos en el paso 1. (**el** -5 **en el ejemplo**).

V Se repite el procedimiento desde el paso 2 hasta el 4 para cada columna, hasta que se terminen las columnas.

El número recuadrado es el **resto**. Los demás números son los coeficientes del resultado de la división (**Cociente**), que será un polinomio de un grado menos que $P(x)$. En el ejemplo anterior el polinomio $P(x)$ es de grado 3 y por lo tanto el resultado de la división es un polinomio de grado 2.

El resultado y el resto de la división son:

$$\boldsymbol{C(x) = 2x^2 - 5x + 10} \qquad\qquad \boldsymbol{R(x) = -15}$$

Teorema del Resto

Dado un polinomio $P(x)$ cualquiera y otro polinomio de la forma $(x-a)$, **el resto** de la división $P(x) \div (x-a)$ es igual al valor numérico $P(a)$.

Es decir que podemos saber cuál es el resto de una división sin necesidad de realizar dicha operación, simplemente calculando un valor numérico del polinomio $P(x)$.

Ejemplo:

El resto de la división $\boldsymbol{(2x^3 - x^2 + 5) \div (x + 2)}$ se puede calcular entontrando el valor numérico $\boldsymbol{P(-2)}$:

$$P(-2) = 2\,(-2)^3 - (-2)^2 + 5 = 2\,(-8) - (4) + 5 = -15$$

Por lo tanto podemos afirmar que el resto de la división de $P(x) = 2x^3 - x^2 + 5$ dividido $D(x) = x + 2$ es $R(x) = -15$, tal como nos había dado al realizar la división con la Regla de Ruffini en el ejemplo anterior.

OBSERVACIÓN: Si a es raíz de $P(x)$ quiere decir que $P(a) = 0$, pero además por el **Teorema del Resto** sabemos que $P(a)$ es el resto de la división $P(x) \div (x-a)$, por lo tanto podemos afirmar que:

Si $\boldsymbol{a}$ es raíz de $\boldsymbol{P(x)} \Rightarrow \boldsymbol{P(x)}$ es divisible por $\boldsymbol{(x-a)}$

Esto es de gran utilidad porque permite escribir a $\boldsymbol{P(x)}$ como producto de factores más simples* de la forma:

$$\boldsymbol{P(x) = (x-a) \cdot C(x)^*}$$

Entonces se dice que $P(x)$ **es divisible por** $(x-a)$ o, lo que es lo mismo, que $P(x)$ **es múltiplo de** $(x-a)$.

Ejemplo:

Dado $\boldsymbol{P(x) = x^3 + 4x + 16}$ se puede verificar que $a = -2$ es raíz de $P(x)$, utilizando la definición de raíz de un polinomio vista antes:

$$P(-2) = (-2)^3 + 4(-2) + 16 = 0$$

Como el **valor numérico** $\boldsymbol{P(a) = 0}$, entonces podemos afirmar que $\boldsymbol{-2}$ **es raíz de** $\boldsymbol{P(x)}$ y podemos reescribirlo como:

$$\boldsymbol{P(x) = x^3 + 4x + 16 = (x+2)(x^2 - 2x + 8)}$$

*Aquí con *más simples* nos referimos a polinomios de menor grado.

*Donde $\boldsymbol{C(x)}$ es el resultado de la división P(x)$\boldsymbol{\div(x-a)}$.

Generalizando:

Si conocemos todas las raíces de un polinomio, entonces se puede utilizar el procedimiento del ejemplo anterior de manera repetida y así escribir $P(x)$ como el producto de factores primos*.

Es decir:

Dados $\boldsymbol{P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}$ y sus raíces $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$ y $\boldsymbol{b_3}$:

$$\boxed{\boldsymbol{P(x) = a_3\,(x - b_1)\,(x - b_2)\,(x - b_3)}}^*$$

Factorización

Este procedimiento se conoce como factorización de un polinomio

2.2. Factorización

Factorizar un Polinomio, o una expresión algebraica en general, consiste en escribirlo como producto de polinomios **más sencillos**.

Ejemplos:

El Polinomio $\boldsymbol{2\,x^2 + 4\,a\,x}$ se puede escribir como $\boldsymbol{2\,x(x + 2a)}$.

Existen varios métodos para factorizar expresiones algebraicas, los mismos se conocen como **casos de Factoreo**. Aquí repasaremos los más utilizados.

I. Factor Común:

Factor Común

Este caso consiste en extraer los factores comunes que están en todos los términos, es decir los aquellos elementos que se encuentran *multiplicando* en todos los términos.

$$\boldsymbol{a\,x^2 + a\,b\,x = a\,x\,(x + b)}$$

Ejemplos:

$$x^3 + 2x^2 = x^2\,(x+2) \qquad\qquad 7x^3 - 49x^2 = 7x^2(x-7)$$

II. Factor Común por Grupos:

Factor Común por Grupos

Este caso sirve para cuatrinomios* en los que haya factores comunes en algunos términos (pero ninguno de ellos se encuentre en todos los términos). El método consiste en extraer un factor común de dos términos y otro factor común de otros dos términos, si la expresión que queda nuevamente tiene un factor que se pueda extraer entonces se repite el procedimiento.

*El concepto de factores primos es exactamente el mismo que el que estudiamos para los números enteros.

*En este caso se utilizó esta propiedad para un polinomio de grado 3 y sus tres raíces, pero podría generalizarse aún más para polinomios de otros grados, sin importar qué tan grandes sean.

*En realidad puede generalizarse para polinomios que tengan un número par de términos.

$$\overbrace{\boldsymbol{x^2 + a\,x}}^{x\ factor\ común} + \overbrace{\boldsymbol{b\,x + a\,b}}^{b\ factor\ común} = \underbrace{\boldsymbol{x(x+a) + b(x+a)}}_{(x+a)\ factor\ común} = \boldsymbol{(x+a)(x+b)}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2xy - 4y + 6x - 12 &= 2y(x-2) + 6(x-2) \\ &= (x-2)(2y+6) \end{aligned}$$

III. Trinomio Cuadrado Perfecto

Se llama trinomio cuadrado perfecto a un polinomio de tres términos (*trinomio*) que se obtiene al desarrollar el cuadrado de un binomio. Este resultado se puede utilizar para factorizar algunos trinomios de segundo grado.

Trinomio Cuadrado Perfecto

$$\boldsymbol{\begin{aligned} (x+a)^2 &= (x+a)(x+a) \\ &= x^2 + ax + ax + a^2 \\ &= x^2 + 2ax + a^2 \end{aligned}}$$

$$\boldsymbol{\begin{aligned} (x-a)^2 &= (x-a)(x-a) \\ &= x^2 - ax - ax + a^2 \\ &= x^2 - 2ax + a^2 \end{aligned}}$$

Ejemplo:

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = (x+5)^2$$

IV. Cuatrinomio Cubo Perfecto

Se llama cuatrinomio cubo perfecto al polinomio de cuatro términos (*cuatrinomio*) que se obtiene al desarrollar el cubo de un binomio. Este resultado se puede utilizar para factorizar algunos cuatrinomios de tercer grado.

Cuatrinomio Cubo Perfecto

$$\boldsymbol{\begin{aligned} (x+a)^3 &= (x+a)^2(x+a) \\ &= (x^2 + 2ax + a^2)(x+a) \\ &= x^3 + ax^2 + 2ax^2 + 2a^2x + a^2x + a^3 \\ &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \\ (x-a)^3 &= (x-a)^2(x-a) \\ &= (x^2 - 2ax + a^2)(x-a) \\ &= x^3 - ax^2 - 2ax^2 + 2a^2x + a^2x - a^3 \\ &= x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \end{aligned}}$$

Ejemplo:

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3 \cdot 2 \cdot x^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot x + 2^3 = (x+2)^3$$

V. Diferencia de Cuadrados

Diferencia de Cuadrados

Se llama de esta forma a una resta de dos expresiones que están al cuadrado, de la forma $x^2 - a^2$. Puede demostrarse que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{(x+a)(x-a)} &= \boldsymbol{x^2 - \cancel{(ax)} + \cancel{(ax)} - a^2} \\ &= \boldsymbol{x^2 - a^2} \end{aligned}$$

Este resultado se puede utilizar para factorizar algunos binomios de segundo grado.

Ejemplos:

$$b^2 - 9 = (b+3)(b-3)$$

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

VI. Factorizar polinomios conociendo una raíz

Factorizar conociendo una raíz

Como vimos en un ejemplo en la sección anterior, si a es raíz de $P(x)$, entonces $P(x)$ es divisible por $(x-a)$ y se puede escribir como:

$$\boldsymbol{P(x) = (x-a) \cdot C(x)}$$

dónde $C(x)$ es el cociente de la división de $P(x) \div (x-a)$.

Ejemplo:

Como $x = -3$ es raíz del polinomio $x^3 - 8x + 3$, entonces se puede factorizar encontrando el resultado de la división:

$$(x^3 - 8x + 3) \div (x + 3)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-8} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-3} & & 3 & 9 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Por lo tanto:

$$x^3 - 8x + 3 = (x+3)(x^2 - 3x + 1)$$

Observación: Si conocemos una raíz a de un polinomio siempre vamos a poder factorizarlo encontrando el cociente mediante la regla de Ruffini, ya que el divisor siempre será de la forma $(x-a)$.

2.3. Fracciones algebraicas

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, con $Q(x) \neq O(x)$ (distinto del polinomio nulo), llamaremos **Fracción Algebraica** a toda expresión de la forma $\boldsymbol{\frac{P(x)}{Q(x)}}$

Definición Fracciones Algebraicas

Observación: La ideterminada x puede tomar cualquier valor real siempre y cuando **no anule el denominador**.

Ejemplos de Expresiones Algebraicas:

$$\frac{2x^2+1}{x^2+2} \qquad \frac{-x}{x-3} \quad (x \neq 3)$$

Existe gran similitud entre las definiciones y operaciones de fracciones algebraicas y números fraccionarios (o números racionales), por eso usaremos para trabajar con este tipo de expresiones algebraicas los mismos principios que utilizamos en operaciones con fracciones, teniendo **especial cuidado en las simplificaciones**.

Observación: En general trataremos de factorizar las expresiones algebraicas lo más posible antes de hacer otras operaciones con ellas.

2.3.1. Simplificación de fracciones algebraicas

<u>Fracciones algebraicas equivalentes:</u>

Dos fracciones algebraicas $\boldsymbol{\frac{P(x)}{Q(x)}}$ y $\boldsymbol{\frac{M(x)}{N(x)}}$ son **equivalentes** si representan a una misma fracción algebraica, es decir una de ellas se obtiene de multiplicar el numerador y el denominador por un mismo polinimio, distinto del polinomio nulo.

Fracciones Algebraicas Equivalentes

Para simplificar una fracción algebraica deberemos factorizar el numerador y el denominador lo más posible. Luego podremos cancelar **factores** iguales que se encuentren tanto en el numerador como en el denominador, pero aclarando que esa simplificación es posible **en caso que dicho factor sea distinto de 0**.

Simplificación de fracciones algebraicas

Ejemplo:

$$\frac{\overbrace{x^3+4x^2+4x}^{\text{Factor común}}}{\underbrace{x^2-4}_{\text{Dif. de cuadrados}}} = \frac{\boldsymbol{x}\,\overbrace{(x^2+4x+4)}^{\text{TCP}}}{\boldsymbol{(x-2)(x+2)}} = \frac{\boldsymbol{x(x+2)^{\cancel{2}}}}{\boldsymbol{(x-2)}\,\underbrace{\cancel{(x+2)}}_{\text{si } \boldsymbol{x+2\neq 0}}} = \frac{\boldsymbol{x(x+2)}}{\boldsymbol{x-2}} \quad \boxed{\textbf{si } \boldsymbol{x \neq -2}}$$

La expresión obtenida es **equivalente** a la original, pero es más *simple*.

<u>**IMPORTANTE**</u>:

Para que esto sea realmente cierto **se debe añadir la condición $\boldsymbol{x \neq -2}$**, ya que sin esa aclaración ambas expresiones **¡NO son iguales!**. Observar que la primera expresión no existe en $\boldsymbol{x = -2}$, mientras que la expresión simplificada si existe en $\boldsymbol{x = -2}$.

IMPORTANTE:

Sólo se pueden simplificar **factores**. Es decir, expresiones que estén **multiplicando** al numerador y al denominador. **De ninguna manera podremos cancelar términos** (algo que esté sumando o restando) del numerador y denominador.

Ejemplo:

$$\frac{x^2 + 2x + \cancel{1}}{x + \cancel{1}} \quad \leftarrow \textbf{¡Está mal simplificado!}$$

2.3.2. Suma y Resta de fracciones algebraicas

Suma de fracciones algebraicas

La suma (y resta) de fracciones algebraicas se realizan con el mismo principio que la suma de fracciones (página 11). Al igual que para números fraccionarios, las fracciones algebraicas son fáciles de sumar y restar si tienen igual denominador. En este caso deben sumarse los numeradores de manera directa y dejar el denominador igual.

Ejemplo:

$$\frac{4x^2 + 4x}{x^2 - 4} + \frac{3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{4x^2 + 4x + 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{4x^2 + 7x + 2}{x^2 - 4}$$

Suma de fracciones algebraicas de diferente denominador

Si los polinomios de los denominadores son diferentes, debemos encontrar fracciones algebraicas equivalentes que tengan el mismo denominador, multiplicando numerador y denominador de cada una por un mismo factor.

Observación: Aunque cualquier denominador común es válido, las operaciones resultan más sencillas si elegimos de todos los posibles denominadores comunes el de menor grado, es decir el **Mínimo Común Denominador**.

Los pasos que se deben seguir para realizar la suma o resta son:

I) Cálculo del denominador común a toda las fracciones.

   1° Factorizar todos los polinomios de los denominadores.

   2° Multiplicar todos los factores diferentes.

   3° Si existen factores con la misma base y distinto exponente, se debe tomar como factor aquel que tenga mayor exponente.

II) Cálculo de las fracciones equivalentes con dicho denominador.

III) Cálculo de la suma o resta.

Ejemplo:

Se desea calcular: $$\frac{3x}{8x^2-8} - \frac{x^2}{4x^2+8x+4}$$

- Primero se factorizan los denominadores:
$$8x^2 - 8 = 8(x^2-1) = 2^3(x-1)(x+1)$$
$$4x^2+8x+4 = 4(x^2+2x+1) = 2^2(x+1)^2$$
- Luego se determina el denominador común:
$$2^3(x+1)^2(x-1)$$
- Se encuentran las fracciones equivalentes:

  Para ello se debe multiplicar numerador y denominador por el factor que le *falta* al denominador para ser igual al denominador común.
$$\frac{3x}{8x^2-8} = \frac{3x}{2^3(x+1)(x-1)} = \frac{3x\boldsymbol{(x+1)}}{2^3(x+1)(x-1)\boldsymbol{(x+1)}} = \frac{3x(x+1)}{2^3(x+1)^2(x-1)}$$
$$\frac{x^2}{4x^2+8x+4} = \frac{x^2}{2^2(x+1)^2} = \frac{x^2\boldsymbol{2(x-1)}}{2^2(x+1)^2\boldsymbol{2(x-1)}} = \frac{2x^2(x-1)}{2^3(x+1)^2(x-1)}$$
- Se realiza la resta:
$$\frac{3x(x+1)}{2^3(x+1)^2(x-1)} - \frac{2x^2(x-1)}{2^3(x+1)^2(x-1)} = \frac{3x(x+1)-2x^2(x-1)}{2^3(x+1)^2(x-1)} =$$
$$= \frac{3x^2+3x-2x^3+2x^2}{2^3(x+1)^2(x-1)} = \frac{-2x^3+5x^2+3x}{2^3(x+1)^2(x-1)}$$

2.3.3. Producto y división de fracciones algebraicas

El producto y división de fracciones algebraicas siguen las mismas reglas que el producto y división de números racionales. Siempre **primero se factorizan** todas las expresiones algebraicas para simplificar de ser posible *antes* de comenzar a operar.

IMPORTANTE:

Siempre hay que aclarar cuando es válida dicha simplificación, añadiendo alguna condición del tipo $\boldsymbol{x \neq a}$ de ser necesario.

Ejemplo:
$$\frac{x^2+2x+1}{5(x^2-1)} \cdot \frac{2x^2-2x}{6x^3} = \frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{5\underbrace{\cancel{(x+1)}}_{\text{si } x\neq -1}\underbrace{\cancel{(x-1)}}_{\text{si } x\neq 1}} \cdot \frac{\cancel{2}\cancel{x}\cancel{(x-1)}}{\underset{3}{\cancel{6}}\underbrace{\cancel{x^3}^{2}}_{\text{si } x\neq 0}} = \frac{x+1}{5}\cdot\frac{1}{3x^2} = \frac{x+1}{15x^2}$$

Si $x \neq -1$, 1 y 0

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

MATEMÁTICA

Capítulo 3

Material de apoyo para el curso de Nivelación de Matemática para los ingresantes a las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal de la Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales de la Universidad Nacional de La Plata.

3. Ecuaciones

Actividad Inicial

3.1. Definición

Una ecuación es una relación de igualdad entre cantidades, algunas de ellas desconocidas, a las que llamaremos **incógnitas** y se las suelen representar mediante letras.

Ejemplos de Ecuaciones:

$$5x + 2y = 3 \qquad \frac{1}{9}p^2 - 1 = 0 \qquad 3 + \frac{t+1}{2} = t$$

El origen de las ecuaciones debe verse en ciertos problemas surgidos tanto de una situación de interés real como planteados para entretenimiento; ambos casos poseen remotos antecedentes históricos. El afán por resolver estos problemas, ya sea por necesidad o como diversión, llevó paulatinamente a la idea fundamental: introducir cantidades desconocidas y someterlas a las leyes de la aritmética, considerando que son números a conocer.

Más allá de cómo se hayan originado las ecuaciones, está claro que una vez que contamos con ellas, es de interés conocer métodos que permitan resolver las ecuaciones, de algunos de ellos nos encargaremos en este capítulo.

3.2. Resolución de ecuaciones

Definición 1:

Las **soluciones** de una ecuación son todos los números reales a, b, c... que al reemplazarlos por la incógnita en la ecuación verifican la igualdad.

Solución de una Ecuación

Ejemplo:

Dada la ecuación $x^2 - 2x = 3$, podemos comprobar que los valores $a = 3$ y $b = -1$ son soluciones de la ecuación, ya que:

Para $a = 3$: $3^2 - 2 \cdot 3 = 9 - 6 = 3 \implies$ se verifica la igualdad

Para $b = -1$: $(-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 1 + 2 = 3 \implies$ se verifica la igualdad

De esta forma comprobamos que $a = 3$ y $b = -1$ son soluciones de la ecuación dada.

Actividad: Decidir si a y $b =$ son soluciones de las ecuaciones:

$2x + 4 = 12$; con $a = 4$ y b=2

$4x^2 + 2x = 120$; con $a = 10$ y $b = 12$

Definición 2:

Ecuaciones Equivalentes

Dos o más ecuaciones se llaman **ecuaciones equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

¿Qué significa resolver una ecuación?

Resolver una ecuación significa determinar si tiene solución/es y en tal caso hallar todas las soluciones.

¿Cómo puede resolverse una ecuación?

El procedimiento para resolver una ecuación está basado en la idea de que la incógnita es un número desconocido que se quiere identificar.

Es decir que básicamente una ecuación es una igualdad entre números; y por lo tanto son válidas todas las propiedades estudiadas en el capítulo 1.

En definitiva el procedimiento para resolver una ecuación consiste en transformar la ecuación en otra equivalente, pero cuya resolución sea más sencilla.

¿Cómo puede obtenerse una ecuación equivalente?

Reglas para la obtención de ecuaciones equivalentes

1° **Sumando o restando a ambos miembros de una ecuación una misma cantidad**.

2° **Multiplicando o dividiendo ambos miembros, de una ecuación por una misma cantidad no nula**.

Ejemplo:

Sea la ecuación:	$3x+1$	$=$	$2-x$
Sumando x a ambos miembros:	$4x+1$	$=$	2
Restando 1 de ambos miembros:	$4x$	$=$	1
Dividiendo por 4 ambos miembros:	x	$=$	$\frac{1}{4}$

Por lo tanto $\boldsymbol{x = \frac{1}{4}}$ es la solución de la ecuación original. Lo que hemos hecho es transformar sucesivamente la ecuación con el fin de **despejar** la incógnita.

3.3. Ecuaciones lineales

Definición:

Ecuaciones Lineales

Se llaman **ecuaciones lineales** a las ecuaciones en donde la incógnita se encuentra elevada a la potencia 1. Es decir, ecuaciones de la forma:

$$\boldsymbol{ax = b}$$

O una equivalente a ella.

¿Cuántas soluciones tiene una ecuación lineal de una incógnita?

Las ecuaciones lineales pueden tener **una única solución**, **infinitas soluciones** o no tener **ninguna solución**.

Ejemplos:

I Solución única:

$$\begin{array}{rcll} -3x &=& 2(x-1)+4 & \\ -3x &=& 2x-2+4 & \longrightarrow \text{ aplicando distributiva} \\ -3x-2x &=& -2+4 & \longrightarrow \text{ agrupando las } x \\ -5x &=& 2 & \longrightarrow \text{ operando} \\ x &=& -2/5 & \Longrightarrow x=-2/5 \text{ es } \textbf{la solución de la ecuación} \end{array}$$

II Infinitas Soluciones:

$$\begin{array}{rcll} 3x-10 &=& 2(3x-5)-3x & \\ 3x-10 &=& 6x-10-3x & \longrightarrow \text{ aplicando distributiva} \\ 3x-10 &=& 3x-10 & \longrightarrow \text{ operando} \\ 3x-3x &=& -10+10 & \longrightarrow \text{ agrupando las } x \\ 0 &=& 0 & \Longrightarrow \text{ Válido para cualquier valor de } x \end{array}$$

La ecuación equivalente obtenida $0 = 0$ se verifica independientemente del valor que tome x, y por lo tanto se puede afirmar que **la ecución tiene infinitas soluciones**.

III Sin solución:

$$\begin{array}{rcll} -3x-8 &=& 2(x-1)-5x & \\ -3x-8 &=& 2x-2-5x & \longrightarrow \text{ aplicando distributiva} \\ -3x-8 &=& -3x-2 & \longrightarrow \text{ operando} \\ -3x+3x &=& -2+8 & \longrightarrow \text{ agrupando las } x \\ 0 &=& 6 & \Longrightarrow \text{ Contradicción o absurdo} \end{array}$$

La ecuación equivalente obtenida en este caso es una absurdo (el número 6 no es igual a 0). Y no existe ningún número que reemplazado por x en la ecuación cambie esta situación, por lo tanto **la ecuación no tiene solución**.

3.4. Ecuaciones cuadráticas

Definición

Se llaman **ecuaciones cuadráticas** a las ecuaciones en donde la incógnita se encuentra elevada al cuadrado. Es decir, ecuaciones de la forma: **Ecuaciones Cuadráticas**

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0,} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{a \neq 0}$$

o cualquier otra ecuación equivalente a ella.

Actividad: Discutan con sus compañeros ¿por qué creen que en la definición anterior aparece la condición $a \neq 0$?

Coeficientes

Los números reales a, b y c se llaman **coeficientes** y son respectivamente el coeficiente del término cuadrático, el coeficiente del término lineal y el coeficiente del término independiente.

¿Cuántas soluciones tiene una ecuación cuadrática de una incógnita?

Las ecuaciones cuadráticas pueden tener **dos soluciones**, **una única solución**, **infinitas soluciones** o no tener **ninguna solución**.

Métodos de resolución

Comencemos viendo como se resuelven ciertas ecuaciones de segundo grado sencillas, para luego analizar algunos métodos de resolución más generales.

I. Ecuaciones cuadráticas sin término lineal:

Ecuación Cuadrática sin Término Lineal

Son de la forma:

$$\boldsymbol{a\,x^2 + c = 0}$$

Estas ecuaciones se pueden resolver por simple despeje, prestando mucha atención a las propiedades de la potencia.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcll}
3x^2 - 12 & = & 0 & \\
3x^2 & = & 12 & \longrightarrow \text{ Pasamos sumando el 12} \\
x^2 & = & 4 & \longrightarrow \text{ Despejamos } x^2 \text{ pasando dividiendo el 3} \\
\sqrt{x^2} & = & \sqrt{4} & \longrightarrow \text{ Aplicamos la raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad} \\
|x| & = & 2 & \longrightarrow \text{ Por propiedad de simplificaicón de raiz y potencia} \\
x = 2 & o & x = -2 & \longrightarrow \text{ Por definición de valor absoluto}
\end{array}$$

La ecuación tiene dos soluciones: $\boldsymbol{x_1 = 2}$ y $\boldsymbol{x_2 = -2}$.

II. Ecuaciones cuadráticas sin término independiente:

Ecuación Cuadrática sin Término Independiente

Son de la forma:

$$\boldsymbol{a\,x^2 + bx = 0}$$

Para resolver este tipo de ecuaciones se debe **sacar factor común** x, para convertir la ecuación a la forma:

$$\boldsymbol{x \cdot (a\,x + b) = 0}$$

Considerando que **si un producto de dos o más números da 0, entonces uno de ellos debe valer 0**. Puede decirse que:

$$\boldsymbol{x = 0} \quad \text{o bien} \quad \boldsymbol{(a\,x + b) = 0} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x_1 = 0 \;;\; x_2 = -\frac{b}{a}}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcll} x^2+4x & = & 0 & \\ x(x+4) & = & 0 & \longrightarrow \text{ Sacamos factor común } x \\ (x+4)=0 \quad o & & x=0 & \longrightarrow \text{ Utilizamos la propiedad del producto} = 0 \\ x=-4 \quad o & & x=0 & \longrightarrow \text{ Resolvemos ambas ecuaciones lineales} \end{array}$$

Las dos soluciones de la ecuación son: $\boldsymbol{x_1 = -4}$ y $\boldsymbol{x_2 = 0}$.

Observación Importante: Se debe tener cuidado al resolver este tipo de ecuaciones de **no perder soluciones** durante el despeje. Por ejemplo uno podría haber comenzado a resolver de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcll} x^2 & = & -4x & \longrightarrow \text{ Dividimos ambos miembros por } x \\ x & = & -4 & \Longrightarrow \text{ Se obtuvo } \textbf{una sola solución} \end{array}$$

De esta forma se obtine una sola solución, lo que claramente está mal.

El error se comete al pasar dividiendo la x sin tener en cuenta que esa x **podría ser 0**.

El paso de dividir ambos miembros de la igualdad por un número para obtener una ecuación equivalente es válido solamente si **el número por el que estamos dividiendo es distinto de cero**.

III. Trinomio cuadrado perfecto (TCP):

Trinomio Cuadrado Perfecto

Ecuación de la forma:

$$\boldsymbol{(A\,x + B)^2 = C^*}$$

Para resolver este tipo de ecuaciones se debe aplicar la raíz cuadrada a ambos miembros y así se obtienen dos ecuaciones lineales de la forma:

$$\boldsymbol{(A\,x + B) = \sqrt{C}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{(A\,x + B) = -\sqrt{C}}$$

Que se pueden resolver de manera sencilla.

Observación: La mayoría de las veces que nos encontramos con este tipo de ecuaciones, el trinomio cuadrado perfecto está desarrollado, es decir de la forma:

$$\boldsymbol{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$$

Y por lo tanto se debe realizar un procedimiento llamado **completar cuadrados** para encontrar una ecuación equivalente que sea de la forma propuesta.

La técnica de **completar cuadrados** consiste en sumar a ambos miembros de la igualdad un número *elegido adecuadamente*, para que en uno de los miembros quede un trinomio cuadrado perfecto, es decir una de las expresiones siguientes:

$$\boldsymbol{x^2 + 2\,a\,x + a^2 = (x+a)^2}$$

$$\boldsymbol{x^2 - 2\,a\,x + a^2 = (x-a)^2}$$

Que puede ser reemplazada por su forman factorizada $(x+a)^2$ o $(x-a)^2$

*Se utilizaron letras mayúsculas para los coeficientes para que no se confundan con los coeficientes de los términos cuadrático e independiente de la forma general de la ecuación dada en la definición.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcll}
x^2 \overbrace{-6x}^{-2\cdot\mathbf{3}\cdot x} +5 & = & 0 & \longrightarrow \text{ Comparamos el término lineal con el del TCP} \\
\overbrace{x^2-6x+\mathbf{9}}^{(x-3)^2}+5 & = & 0+\mathbf{9} & \longrightarrow \text{ Sumamos } \mathbf{9} \text{ en ambos lados de la igualdad} \\
(x-3)^2+5 & = & 9 & \longrightarrow \text{ Aplicamos el tercer caso de factoreo} \\
(x-3)^2 & = & 4 & \longrightarrow \text{ Restamos 5 en ambos lados de la igualdad} \\
\sqrt{(x-3)} & = & \sqrt{4} & \longrightarrow \text{ Aplicamos la raíz cuadrada en ambos miembros} \\
|(x-3)| & = & 2 & \longrightarrow \text{ Por propiedad de raíces y potencias} \\
x-3 & = & \pm 2 & \longrightarrow \text{ Utilizamos la definición de valor absoluto} \\
x & = & 3 \pm 2 & \longrightarrow \text{ Sumamos 3 a ambos miembros de la igualdad} \\
x_1 = 5 & o & x_2 = 1 & \Longrightarrow \text{ Soluciones de la ecuación}
\end{array}$$

IV. Forma general (Fórmula de Bhaskara):

Fórmula de Bhaskara

El método de completación de cuadrados puede generalizarse para resolver cualquier ecuación cuadrátiva, que sea de la forma:

$$\boldsymbol{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$$

Si se realiza el procedimiento de completación de cuadradado para esta ecuación, se obtiene la **Fórmula de Bhaskara** que da las soluciones para cualquier ecuación cuadrática:

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}}$$

FCAyF Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

MATEMÁTICA

Capítulo 4

Material de apoyo para el curso de Nivelación de Matemática para los ingresantes a las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal de la Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales de la Universidad Nacional de La Plata.

4. Rectas en el plano coordenado

4.1. Coordenadas rectangulares en el plano

Se llama plano coordenado al plano que queda formado al trazar dos rectas perpendiculares, que llamaremos eje x y eje y. El punto de intersección entre los dos ejes coordenados se llama origen de coordenadas y se representa como O .

El plano queda así dividido en cuatro regiones que se llaman **cuadrantes** y que se numeran I, II, III, IV.

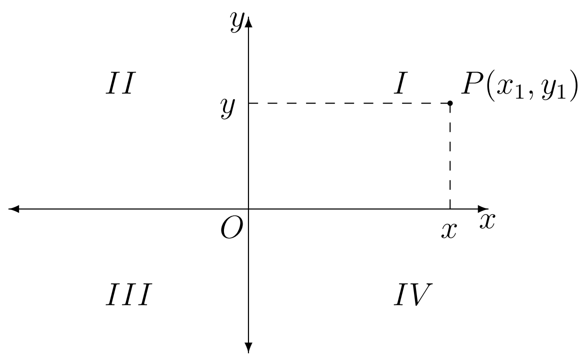
Cada uno de los ejes es la recta de los números reales, y los números se representan sobre ella como vimos en el capítulo 1. Por convención, sobre el eje x colocamos los positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda; sobre el eje y, colocamos los números positivos arriba del 0 y los negativos debajo del 0.

Punto en el plano:

Coordenadas de un Punto

Para ubicar un punto en el plano coordenado es necesario identificar dos coordenadas (o valores númericos), una correspondiente a la distancia del punto a O en la dirección del eje x y la otra correspondiente a la distancia a O en la dirección del eje y.

Es decir que a un punto P del plano debemos asociarle dos números (ordenadamente): (x_1, y_1), para poder graficarlo.



Abscisa y Ordenada

Decimos que P tiene coordenadas (x, y), la primera coordenada x se llama **abscisa** de P y la segunda se llama **ordenada** de P. Recíprocamente, dado un par ordenado de números (x, y) existe un punto P del plano del cual son las coordenadas.

4.2. Rectas en el plano

La **interpretación geométrica** de las ecuaciones lineales son rectas en el plano, es decir **la gráfica** que representa una ecuación lineal es una recta.

En otras palabras:

- Todos los pares de valores $(x_1, y_1)^*$ que verifican la ecuación de una recta, representan puntos que pertencen a la recta y en consecuencia se ubican sobre la gráfica de dicha recta.
- Recíprocamente, todos los puntos que pertenecen a la gráfica de la recta necesariamente verifican la ecuación de dicha recta.

Ejemplo:

Dada la recta L, de ecuación: $y = 3x + 2$, podemos averiguar si los puntos $P_0(1, 5)$ y $P_1(2, 7)$ pertencen a la recta L corroborando si las coordenadas de dichos puntos **verifican la ecuación de** L (es decir, son una solución de la ecuación de la recta).

$$\begin{array}{rrcl} P_0(1,5): & y & = & 3x+2 \\ & 5 & = & 3\cdot 1+2 \\ & 5 & = & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} P_1(2,7): & y & = & 3x+2 \\ & 7 & \neq & 3\cdot 2+2 \\ & 7 & \neq & 8 \end{array}$$

Es decir que P_0 sí pertence a la recta L pero P_1 no.

Ejemplo:

Dada la recta L, de ecuación $2y = x + 3$, para encontrar puntos que pertenezcan a L, se debe dar un valor arbitrario a una de las variables (x o y) y encontrar el valor de la otra:

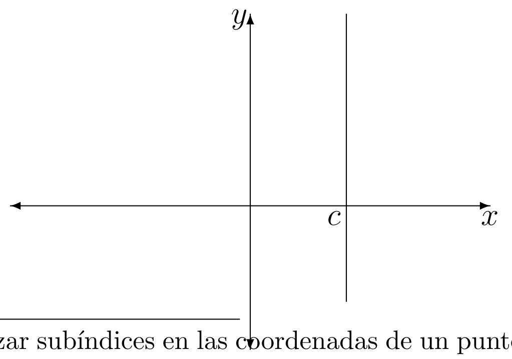
$$\begin{array}{lrcl} \text{Ejemplo 1: } x=2: & 2y & = & x+3 \\ & 2y & = & 2+3 \\ & 2y & = & 5 \\ & y & = & \frac{5}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{lrcl} \text{Ejemplo 2: } y=1: & 2y & = & x+3 \\ & 2\cdot 1 & = & x+3 \\ & 2 & = & x+3 \\ & 2-3 & = & x \\ & -1 & = & x \end{array}$$

Es decir que los puntos $P_0(2, \frac{5}{2})$ y $P_1(-1, 1)$ pertencen a la recta L.

4.2.1. Ecuación de la Recta

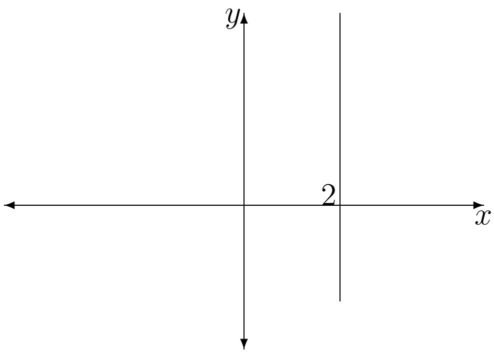
I Si L es **vertical** (paralela al eje y), tiene ecuación de la forma: $\boldsymbol{x = c}$

Rectas paralelas al eje y



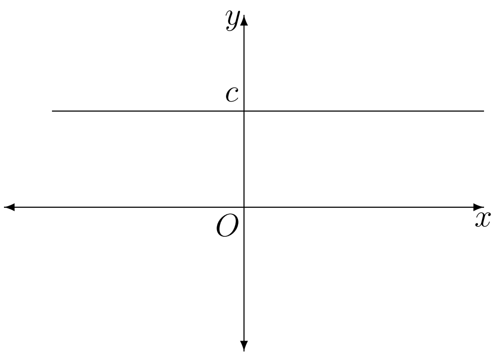
*Es común utilizar subíndices en las coordenadas de un punto, por ejemplo $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, etc., para indicar que se trata de un punto conocido del plano, es decir **un punto específico del plano**, y en cambio utilizar un punto sin subíndices $P(x, y)$ para referirnos a un punto genérico, es decir **a cualquier punto del plano**

Ejemplo: $x = 2$

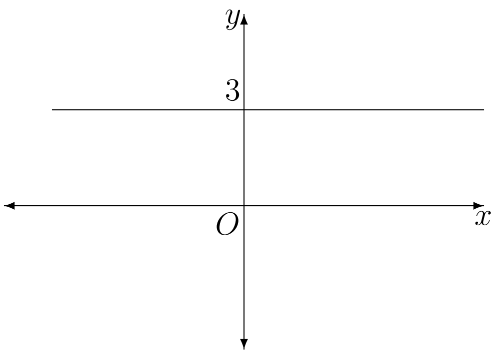


Rectas paralelas al eje x

II Si L es **horizontal** (paralela al eje x), tiene ecuación de la forma: $\boldsymbol{y = c}$



Ejemplo: $y = 3$



Ecuación de la Recta

III Si L no es **vertical** ni **horizontal**, tiene ecuación de la forma:

$$\boldsymbol{y = m\,x + b}$$

Los valores m y b son la **pendiente** y la **ordenada al origen** respectivamente.

Esta ecuación de la recta se conoce como **ecuación explícita**, pero no es la única forma en que se puede encontrar la ecuación de una recta. Cualquier ecuación con dos variables (x e y) que sea lineal en x y lineal en y, es la ecuación de una recta.

Ejemplos de ecuaciones de rectas:

$$5y + 2x - 1 = 0 \quad ; \quad y + 1 = 2x - 1$$
$$y - 5 = 3(x + 1) \quad ; \quad 2y - 5x + 1 = 3(x + y)$$

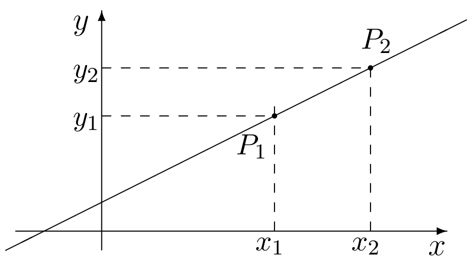
Si bien existen diferentes formas, equivalentes entre ellas, de escribir la ecuación de una recta, la ecuación explícita de la recta es muy útil porque de ella se puede obtener los valores de la pendiente y la ordenada al origen por simple inspección.

La **ordenada al origen** es el punto donde la recta corta al eje y. **Ordenada al Origen**

La **pendiente** de una recta indica la "inclinación" de la misma y está directamente relacionada con el ángulo que forma la recta con los ejes coordenados.

Dada una recta L que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, como la de la siguiente figura, la pendiente de la recta se define como: **Pendiente**

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$



Aclaración: Es importante remarcar que la pendiente es **independientemente de los puntos** que se utilicen para su cálculo.

Ecuación de la recta a partir de un punto y la pendiente

Es común que se necesite encontrar la ecuación de una recta a partir de un punto que pertenece a la recta y su pendiente.

Dada una recta L, con pendiente conocida de valor $\boldsymbol{m}$ y suponiendo que se conoce un punto $\boldsymbol{P_1(x_1; y_1)} \in$ a L, entoces su ecuación está dada por:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0(2, -3)$ y que tiene pendiente igual a -5.

Utilizamos la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

En la que reemplazamos x_1 e y_1 por las coordenadas del punto, y m por el valor de la pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-3) = -5(x - 2)$$
$$y + 3 = -5(x - 2)$$

La ecuación de la recta buscada es: $y+3 = -5(x-2)$. Podemos dejar la ecuación así o bien operar para expresarla en su forma explícita:

$$y + 3 = -5(x - 2)$$
$$y + 3 = -5x - 5(-2)$$
$$y = -5x + 10 - 3$$
$$y = -5x + 7$$

Ecuación de la recta a partir de dos puntos

En el caso en que se desea encontrar la ecuación de una recta de la que se conocen dos puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$, ambos pertenecientes a la recta, se debe calcular la pendiente a partir de dichos puntos y luego proceder como en el caso anterior:

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Luego:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

o

$$\boldsymbol{y - y_2 = m(x - x_2)}$$

Ejemplo: Encontar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(1, 3)$ y $P_2(2, -5)$

Para poder utilizar la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

necesitamos conocer un punto de la recta y la pendiente.

El punto ya lo tenemos, de hecho conocemos dos puntos y por lo tanto podemos elegir cualquiera de los dos indistintamente. Es decir que nos falta calcular la pendiente:

Utilizamos la ecuación de la pendiente, reemplazando en la misma las coordenadas de los dos puntos de la recta:

$$m = \frac{-5 - 3}{2 - 1}$$

$$m = \frac{-8}{1}$$
$$m = -8$$

Ya conocemos la pendiente: $m = -8$, entonces elegimos uno de los puntos que conocemos de la recta, por ejemplo el punto $P_1(1, 3)$ y armamos la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = -8(x - 1)$$

que es la ecuación de la recta pedida. Al igual que en el ejemplo anterior, podemos dejar la ecuación así u operar para obtener la ecuación explícita de la recta:

$$y - 3 = -8(x - 1)$$
$$y - 3 = -8x + 8$$
$$y = -8x + 8 + 3$$
$$y = -8x + 11$$

4.2.2. Gráfica de una recta a partir de su ecuación

Si conocemos la ecuación explícita de una recta $\boldsymbol{y = mx + b}$ podemos graficarla siguiendo los siguientes pasos:

I Marcamos la ordenada al origen $\boldsymbol{b}$ sobre el eje y, que corresponde al punto $(0, b)$ del plano coordenado.

II Luego indentificamos la pendiente m y la escribimos como una fracción (si la pendiente es un número entero entonces la podemos escribir como una fracción con denominador igual a 1).

III A partir del punto marcado en 1, nos desplazamos según la pendiente $\boldsymbol{m}$de la siguiente manera:

- La cantidad que indique el **numerador** en dirección del eje $\boldsymbol{y}$ positivo.
- La cantidad que indique el denominador en dirección del eje $\boldsymbol{x}$ positivo.
- Si la pendiente es negativa a **uno solo de los movimientos** lo hacemos en dirección contraria (es decir el número del numerador en la dirección del eje y negativo o el número del denominador en la dirección del eje x negativo).

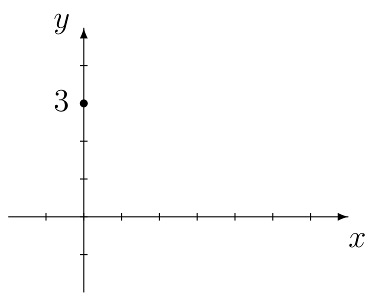
IV Trazamos la recta que pasa por los dos puntos encontrados.

Ejemplo:

Sea la recta: $y = -2x + 3$

Ubicamos el punto donde la recta corta al eje y:

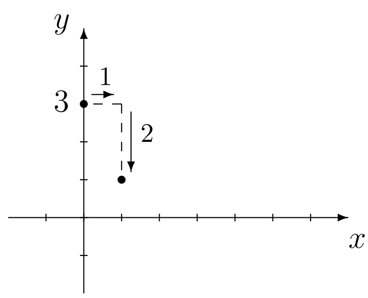
$$y = -2x+\mathbf{3}$$



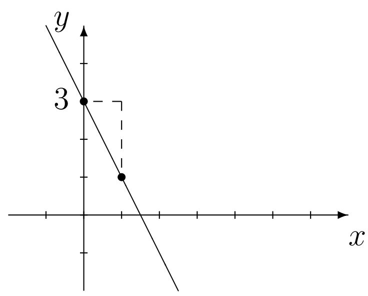
como $\boldsymbol{m = -2 = -\frac{2}{1}}$

$\Longrightarrow$ desplazamos 2 unidades hacia abajo

$\Longrightarrow$ desplazamos 1 hacia la derecha

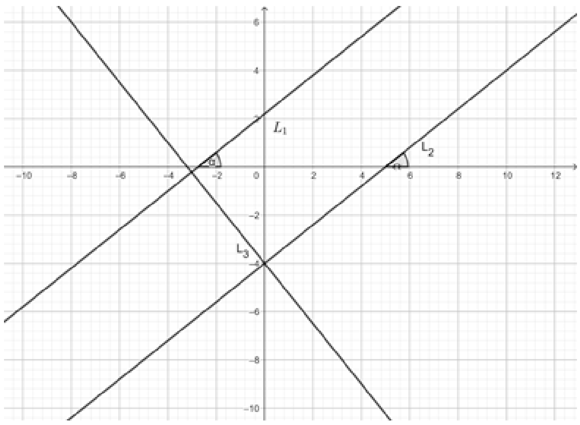


Trazamos la recta que pasa por estos dos puntos



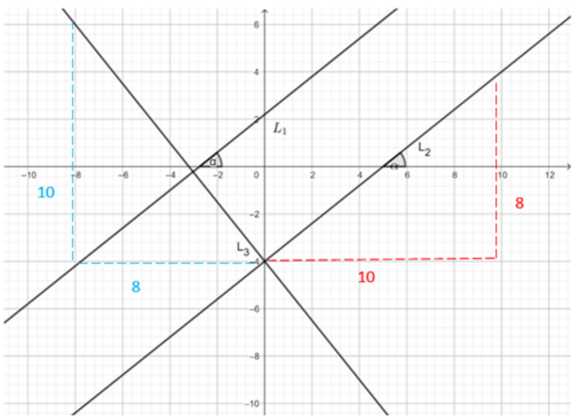
4.3. Rectas paralelas y perpendiculares

En un plano dos rectas pueden ser paralelas, secantes o perpendiculares. En particular, las rectas paralelas y perpendiculares se pueden estudiar a partir de sus pendientes.



En el caso de las rectas L_1 y L_2 son paralelas ya que no se intersectan y sus pendientes son iguales.

Cuando las rectas son perpendiculares, es decir, se intersectan y forman un ángulo de 90° el producto de las pendientes es igual a -1. Esto significa que las pendientes son inversas y opuestas. Por ejemplo: gráficamente vemos que la recta L_3 tiene pendiente $\frac{8}{10}$. En cambio, la recta L_2 tendrá pendiente $-\frac{10}{8}$. Como L_2 es paralela a L_1, L_3 también resulta una recta perpendicular para L_1.



4.4. Sistemas de ecuaciones lineales

4.4.1. Interpretación de una ecuación lineal

Como estudiamos en el capítulo 3, una ecuación lineal es aquella en la cual todas sus incógnitas están elevadas a una potencia igual a **1**. Las ecuaciones que estudiamos entonces tenían una sola incógnita, sin embargo existen ecuaciones lineales de dos o más incógnitas.

Ejemplos de ecuaciones lineales de 2 incógnitas:

$$2x + 5y - 7 = 0 \quad ; \quad y = 3x + 5 \quad ; \quad x - 3y = 5$$

Como vimos en las secciones anteriores, todas estas son ecuaciones de rectas.

4.4.2. Definición de sistemas de ecuaciones lineales

Sistema Lineal de Ecuaciones

Se llama **sistema de ecuaciones lineales** a un conjunto de ecuaciones lineales, relacionadas entre sí. Cada una de las ecuaciones puede tener una o más incógnitas.

Un sistema de dos ecuaciones lineales, con dos incógnitas, es de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = & c \\ dx + ey = & f \end{cases}$$

donde a, b, c, d, e, f son números reales.

Ejemplo de sistema de ecuaciones lineal:

$$\begin{cases} x + y & = & 2 \\ 3x - y & = & 2 \end{cases}$$

4.4.3. Métodos de Resolución de Ecuaciones Lineales

I. Resolución Gráfica

:

Un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas como el del ejemplo anterior, se interpreta geométricamente como dos rectas en el plano coordenado, ya que cada una de las ecuaciones que lo conforman es la ecuación de una recta.

Definición:

Solución del Sistema

Se llama **solución del sistema** a un par de valores (x_0, y_0) que al reemplazarlos en los valores de x e y respectivamente, ambas ecuaciones se verifican simultáneamente. Es decir que el par de valores (x_0, y_0) es solución de ambas ecuaciones.

Cada una de estas soluciones (x_0, y_0) es un punto en el plano coordenado, que pertenece **simultáneamente a ambas rectas**.

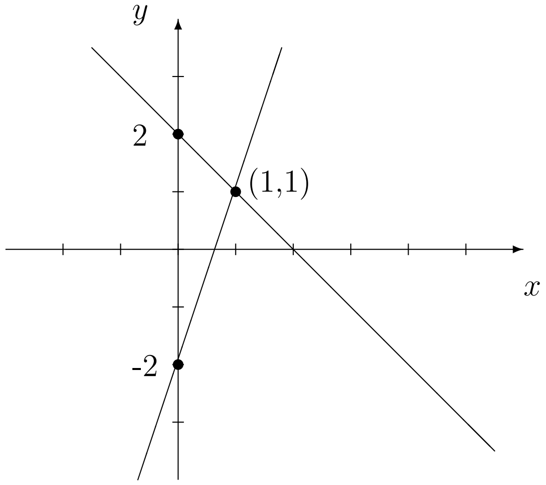
Ejemplo:

Para el ejemplo anterior, se puede verificar que $(1,1)$ es solución del sistema, comprobando que es solución de cada una de las ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ 3x-y &= 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+1 &= 2 \\ 3\cdot 1-1 &= 2 \end{cases}$$

Si graficamos ambas rectas:



En el gráfico anterior se observa que el punto $(1,1)$ pertenece a las dos rectas y por lo tanto es el punto donde ambas rectas se cortan o intersectan.

¿Cuántas soluciones tiene un sistema de ecuaciones lineal?

Al igual que con las ecuaciones lineales, uns sistema de ecuaciones lineal puede tener **una única solución**, **infinitas soluciones** o **no tener solución**.

II. Método de Sustitución

Método de Sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas de una ecuación y reemplazar la expresión obtenida en la otra ecuación.

De esta forma deben resolverse dos ecuaciones lineales de una sola incógnita, como estudiamos en secciones anteriores.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 4x-3y=6 \end{cases}$$

Despejamos x de la primera ecuación:

$$x=\frac{12-3y}{2} \quad (1)$$

Reemplazamos la expresión en la segunda ecuación:

$$4\left(\frac{12-3y}{2}\right)-3y=6$$

Operamos:

$$24-6y-3y=6$$
$$-9y=6-24$$
$$-9y=-18$$
$$y=2$$

El valor de y se reemplaza en (1):

$$x=\frac{12-3\cdot 2}{2}=3$$

El sistema tiene **una sola solución** que consiste en dos valores, uno correspondiente a la variable x y el otro a la variable y. Para expresar el resultado pueden utilizarse dos formas, una es darlo como un par ordenado: $(3\,;2)$, dónde el primer valor dentro del paréntesis corresponde a x y el segundo a y. La segunda manera de dar el resultado consiste en dar ambos valores indicando a qué variable corresponde cada uno: $x_1=3$; $y_1=2$.

III. Método de igualación

Método de Igualación

Consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones e igualar ambas ecuaciones resultantes.

De esta forma se obtiene una nueva ecuación lineal de una sola incógnita y se resuelve para obtener el resultado de **una sola de las incógnitas**.

Finalmente se reemplaza el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones originales y se despeja la otra incógnita.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 4x+6y=6 \end{cases}$$

Despejamos x de las dos ecuaciones:

De la primera ecuación: $$x=\frac{12-3y}{2}$$

De la segunda ecuación: $$x=\frac{6-6y}{4}$$

Luego igualamos:

$$\frac{12-3y}{2}=\frac{6-6y}{4}$$

Operando se obtiene:

$$4\,(12-3y)=2\,(6-6y)$$
$$48-12y=12-12y$$

$$48 = 12 - \cancel{12y} + \cancel{12y}$$
$$48 = 12$$

La última afirmación es lo que en matemática se llama una **contradicción o absurdo** y, como vimos en secciones anteriores, indica que el sistema **no tiene solución**.

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

MATEMÁTICA

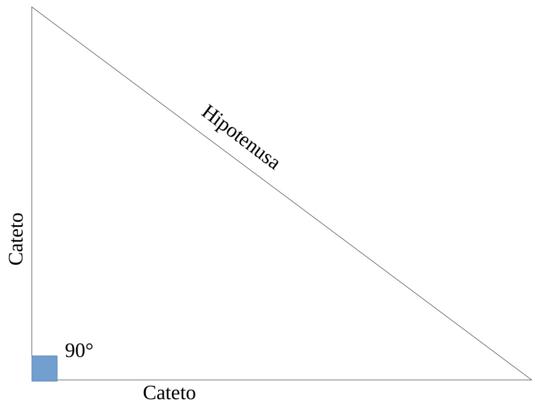
Capítulo 5

Material de apoyo para el curso de Nivelación de Matemática para los ingresantes a las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal de la Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales de la Universidad Nacional de La Plata.

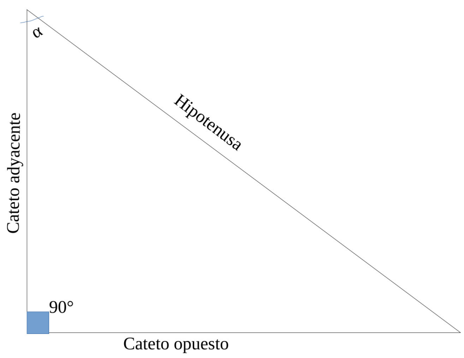
5. Relaciones Trigonométricas

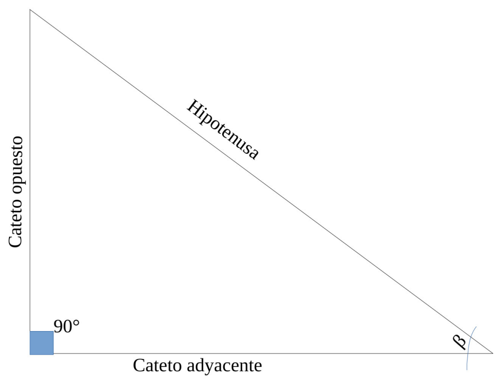
5.1. Triángulos Rectángulos

En geometría, se define al triángulo rectángulo como cualquier triángulo que tiene un ángulo recto, es decir, con un ángulo que mide 90°. Como la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es de 180°, los dos ángulos restantes del triángulo rectángulo son agudos, ya que cada uno mide menos de 90°. Los dos lados de un triángulo rectángulo que forman el ángulo recto se denominan catetos y el tercer lado restante es la hipotenusa, que es opuesto al ángulo recto y es el lado con mayor longitud de triángulo.



Los catetos, según la relación con alguno de los ángulos agudos, pueden ser opuestos o adyacentes. El cateto opuesto es el lado que está enfrente del ángulo dado. El cateto adyacente es el lado que está junto al ángulo dado, y que no es la hipotenusa.





5.2. Relaciones Trigonométricas

Las relaciones trigonométricas son medidas especiales de un triángulo rectángulo. Hay tres relaciones trigonométricas básicas: seno, coseno y tangente. Dado un ángulo α, las relaciones trigonométricas básicas se definen como sigue:

$$sen\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$tg\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Una manera práctica de recordarlas es mediante "SOH-CAH-TOA". Donde el "**SOH**"nos dice que **S**eno es igual a **O**puesto sobre **H**ipotenusa, "**CAH**"nos dice que **C**oseno es igual a **A**dyacente sobre **H**ipotenusa y "**TOA** nos dice que **T**angente es igual a **O**puesto sobre **A**dyacente. Tanto el seno como el coseno de un ángulo, siempre da valores comprendidos entre 1 y -1. Es decir, $|sen(\alpha)| \leq 1$ y $|cos(\alpha)| \leq 1$.

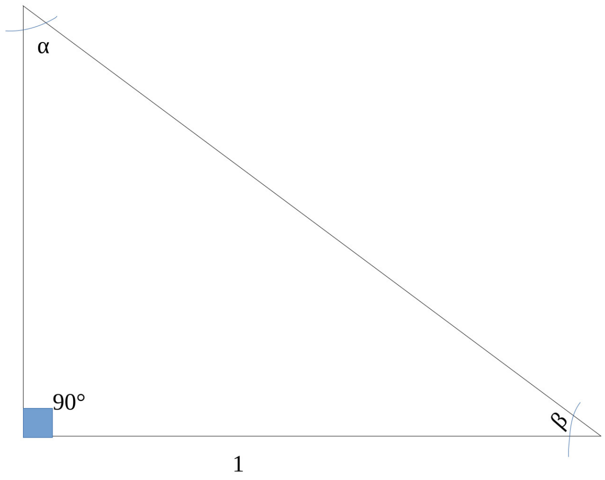
NOTA: La tangente de un ángulo también se puede obtener como

$$tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

.

Ejemplo:

Dado el siguiente triángulo rectángulo:



Si $\alpha = 45°$, ¿Cuánto vale la hipotenusa?

Notemos que tenemos como dato uno de los ángulos y el cateto opuesto a dicho ángulo, mientras qu enuestra incógnita es la hipotenusa, por lo tanto, pensando en ”SOHCATOA”, haremos uso del ”SOH”, que es la relación que involucra a los lados opuestos e hipotenusa. Reemplazando con los datos tenemos:

$$sen(45°) = \frac{1}{h}$$

Para despejar h, primero debemos ”pasarlo”multiplicando hacia el otro lado de la igualdad:

$$h \cdot sen(45°) = 1$$

Luego, ”pasamos dividiendo.ªl seno del ángulo

$$h = \frac{1}{sen(45°)}$$

Finalmente, resolviendo, $h = \sqrt{2}$.

Por último, cuando nuestra incógnita es el ángulo, se puede despejar teniendo en cuenta que las funciones inversas del seno, coseno y tangente son el arcoseno (arcsen), arcocoseno (arccos) y el arcotangente (arctg) respectivamente.