El método simplex para resolver problemas de programación lineal: una síntesis

Pablo Yapura
Curso de Investigación Operativa (2002)

A continuación se presentan los procedimientos, reglas y cálculos necesarios para la ejecución del algoritmo simplex y de los métodos de la M grande y de las dos fases. La presentación que se hace, adaptada de Dykstra (1984), no es exhaustiva (por ejemplo, no incluye criterios para identificar óptimos alternativos o soluciones degeneradas; tampoco incluye la determinación de las variables duales) ni está completamente formalizada. Sin embargo, sintetiza los principios ya estudiados y servirá de referencia para abordar temas posteriores.

1. **Inicialización**. Para obtener una solución factible básica inicial, seguir los siguientes pasos:

   a. Convertir cada ecuación o inecuación de restricción en una ecuación equivalente, multiplicándola por -1 si el parámetro no fuera positivo y agregando variables de holgura y artificiales, de acuerdo con:
   1. Para cada restricción del tipo ≤ sumar una variable de holgura a la izquierda de la igualdad.
   2. Para cada restricción que sea una igualdad sumar una variable artificial a la izquierda de la igualdad.
   3. Para cada restricción del tipo ≥ sustraer una variable de holgura y sumar una variable artificial a la izquierda de la igualdad.

   b. Si el objetivo es minimizar z, multiplicar la función objetivo por -1.

   c. Expresar la función objetivo de la siguiente forma: $z - f(x) = 0$, donde x incluye las variables artificiales y de holgura.

   d. Si el problema aumentado incluye variables artificiales, se debería usar alguno de los siguientes procedimientos alternativos para eliminarlas de la base y obtener una solución factible:
   1. Si se usa el método de la M grande, se debe asignar una penalidad de $-M$ al coeficiente de las variables artificiales en la función objetivo original (previo al re-ordenamiento indicado en c). Si el re-ordenamiento se hizo, se debe asignar una penalidad de $+M$.
   2. Si se usa el método bifásico, se debe agregar una pseudo-función objetivo para la primera fase de la forma: $w = g(x)$, donde los coeficientes de $g(x)$ son 1 para las variables artificiales y 0 para todas las demás. Multiplicar la pseudo-función objetivo por -1 y replantearla de la siguiente forma: $w - g(x) = 0$.

   e. Transferir los coeficientes del problema a la tabla simplex inicial. Designar a la función objetivo como fila 0 y, si se usa el método de las dos fases, a la función objetivo de la Fase I o pseudo-función objetivo como fila 0'. Si es necesario, obtener una base pivoteando sobre las variables artificiales para convertir sus columnas en vectores unidad.

2. **Optimización**. Habiendo obtenido una base inicial, avanzar hacia una solución mejor aplicando los pasos siguientes tantas veces como sea necesario (iterando):

   a. Usando el criterio simplex, identificar la variable básica entrante como aquella no-básica con el coeficiente más negativo en la fila de la función objetivo (fila 0). En la Fase I del método de las dos fases, elegir la variable con el coeficiente más negativo en la fila de la pseudo-función objetivo (fila 0').

Criterio de optimalidad. Si, y sólo si, cada coeficiente en la fila 0 (o en la fila 0' de la Fase I del método bifásico) es no-negativo, la solución óptima (o el final de la primera fase) ha sido encontrada.

b. Para identificar la variable básica saliente determinar los cocientes $q_i = b_i / a_{ik}$ ($i = 1, 2, ..., m$), donde b_i es el valor actual del parámetro en la fila i y a_{ik} es el coeficiente positivo en la fila i correspondiente a la columna de la variable entrante k (es decir que q_i no se calcula si $a_{ik} \leq 0$). Elegir la restricción correspondiente al menor valor de q_i como la más limitante. La variable básica que corresponde a esta fila se identifica como la variable básica saliente.

Criterio de solución no-acotada. Si cualquier variable x_k con criterio simplex negativo presenta coeficientes negativos o nulos en toda la columna (es decir, $a_{ik} \leq 0, \ \forall i = 1, ..., m$), entonces la solución del problema de programación lineal es no-acotada. Informar y finalizar el algoritmo.

c. Transformar la tabla actual en una nueva, que corresponda a una nueva base, ejecutando las operaciones de pivoteo de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Dividir cada elemento de la fila pívot (que es la fila asociada con la variable básica saliente) por el elemento pívot (es decir, el elemento en la intersección de la fila pívot con la columna pívot, que es la columna correspondiente a la variable básica entrante).

2. Transformar el resto de las filas sustrayéndole a cada elemento el producto de su correspondiente elemento en la fila pívot, actualizada en el paso anterior, por el coeficiente del elemento de la fila en la columna pívot (es decir, $a_{ik}, \ \forall i = 0, ..., m$).

Criterio de factibilidad. Si cualquier variable artificial permanece en la base con valor no nulo al final del método de la M, o al final de la Fase I del método bifásico, entonces el problema de programación lineal no tiene solución factible. Informar y finalizar el algoritmo.

d. Si el criterio de optimalidad ha sido satisfecho para un problema sin variables artificiales, o un problema factible ha sido resuelto usando el método de la M grande, entonces la solución óptima ha sido encontrada. Informar y finalizar el algoritmo.

e. Cuando el criterio de optimalidad ha sido satisfecho para la Fase I de un problema factible, iniciar la segunda fase siguiendo los siguientes pasos:

1. Desechar de toda consideración la fila de la pseudo-función objetivo (fila 0') y la variable w de la tabla.

2. Usando los coeficientes actualizados de la fila de la función objetivo (fila 0) para comparar los criterios simplex, proceder a pivotar de acuerdo con las reglas ya establecidas para la optimización, excepto que no se deben seleccionar las variables artificiales para entrar en la base, independientemente de sus criterios simplex.

3. La solución óptima ha sido encontrada cuando el criterio de optimalidad ha sido satisfecho para la segunda fase del método bifásico. Informar y finalizar el algoritmo.

Bibliografía citada

Dykstra DP. 1984. Mathematical programming for natural resource management. McGraw-Hill Book Company. New York. 318 pp.