Introducción a la Investigación de Operaciones

Unidad didáctica 3: Extensiones de la programación lineal

- **Alcance:** En esta unidad didáctica se introducirán numerosos modelos matemáticos, principalmente lineales y deterministas. Algunos de los modelos tienen formulaciones que ayudan a superar limitaciones de la programación lineal. Otros modelos extienden la generalidad de la programación lineal para representar y resolver problemas. Todos los modelos que se presentarán pueden ser considerados prototípicos y el abordaje para su estudio se hará a partir de las similitudes y diferencias con el problema de la programación lineal.

- **Contenidos:** Programación por metas. Fundamentos y aplicaciones. El modelo lineal, su formulación y solución. Objetivos unidireccionales. Preferencias y prioridades.

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
Universidad Nacional de La Plata
La Plata – Julio del 2020 – Pablo Yapura

Programación por Objetivos

- El modelo de decisión se ha desarrollado para resolver problemas en los que hay **más de un objetivo relevante** (objetivos contradictorios y soluciones de compromiso). El problema del uso múltiple de los bosques (y de las tierras en general) es probablemente el ejemplo más representativo de este tipo de situaciones y ha sido ampliamente estudiado.

- El modelo matemático busca **minimizar las desviaciones** en el cumplimiento de ciertas **metas** u **objetivos**, sujetas a ciertas restricciones que representan a las propias **metas** y a otras restricciones que representan límites ***físicos***. Contrariamente a las restricciones ***físicas***, las metas serán alcanzadas o satisfechas tanto como sea posible, pero no necesariamente de manera completa.

- Conseguir esta flexibilidad demanda el establecimiento de **metas cuantitativamente explicitadas** y una **estructura de preferencias igualmente explicitada** por parte del responsable de la decisión para todas las metas identificadas, lo que finalmente constituye su principal objeción.

Programación por Objetivos

- El modelo matemático **puede ser lineal** (si se lo plantea como una extensión de la programación lineal), lo que implica que se puede usar el **método símplex** para resolverlo, con todas las ventajas asociadas (principalmente la eficiencia).

- El único concepto novedoso es el empleo de **variables irrestrictas**. Puesto que a las desviaciones se les debe permitir tomar valores negativos o positivos, es necesario superar la limitación del requerimiento de no negatividad de la programación lineal. Entonces, si se necesita representar una variable irrestricta en signo (sea x_1), se pueden definir:

$$d_1^+ = \begin{cases} d_1 & \text{si } x_1 \geqslant 0 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \qquad d_1^- = \begin{cases} |d_1| & \text{si } d_1 < 0 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$d_1 = d_1^+ - d_1^-$$

- Puesto que las variables de desviación son linealmente dependientes, por el axioma de la independencia sólo una de ellas puede estar en la base (*i.e.* ser estrictamente positiva).

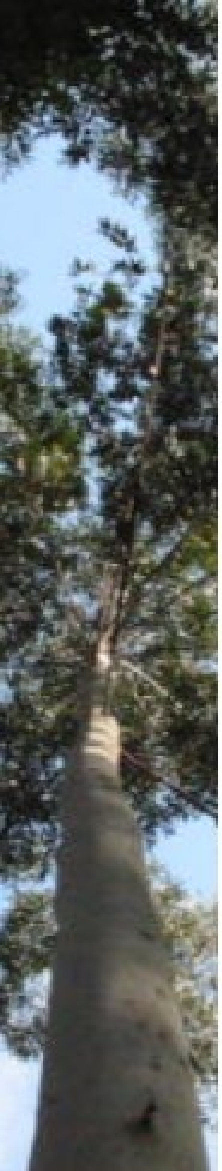
Programación por Objetivos

- En nuestro problema del predador y su presa, supongamos que los tiempos de traslado y captura se consideran como un objetivo consolidado y que se quiere consumir aproximadamente 150 minutos.

$$\begin{aligned} 4x_1+4x_2 &\approx 150 \\ 4x_1+4x_2 &= 150+d_1 \\ 4x_1+4x_2 &= 150+d_1^+-d_1^- \\ 4x_1+4x_2-d_1^++d_1^- &= 150 \\ d_1 \text{ irrestricta},\ d_1^+ &\geqslant 0,\ d_1^- \geqslant 0. \end{aligned}$$

- También se considerará a la provisión de nutrientes como un objetivo y el nivel de producción se establece en aproximadamente 90 mg.

- La provisión de calorías se considera un objetivo *físico* y se especifica que la dieta debe entregar al menos 240 calorías.



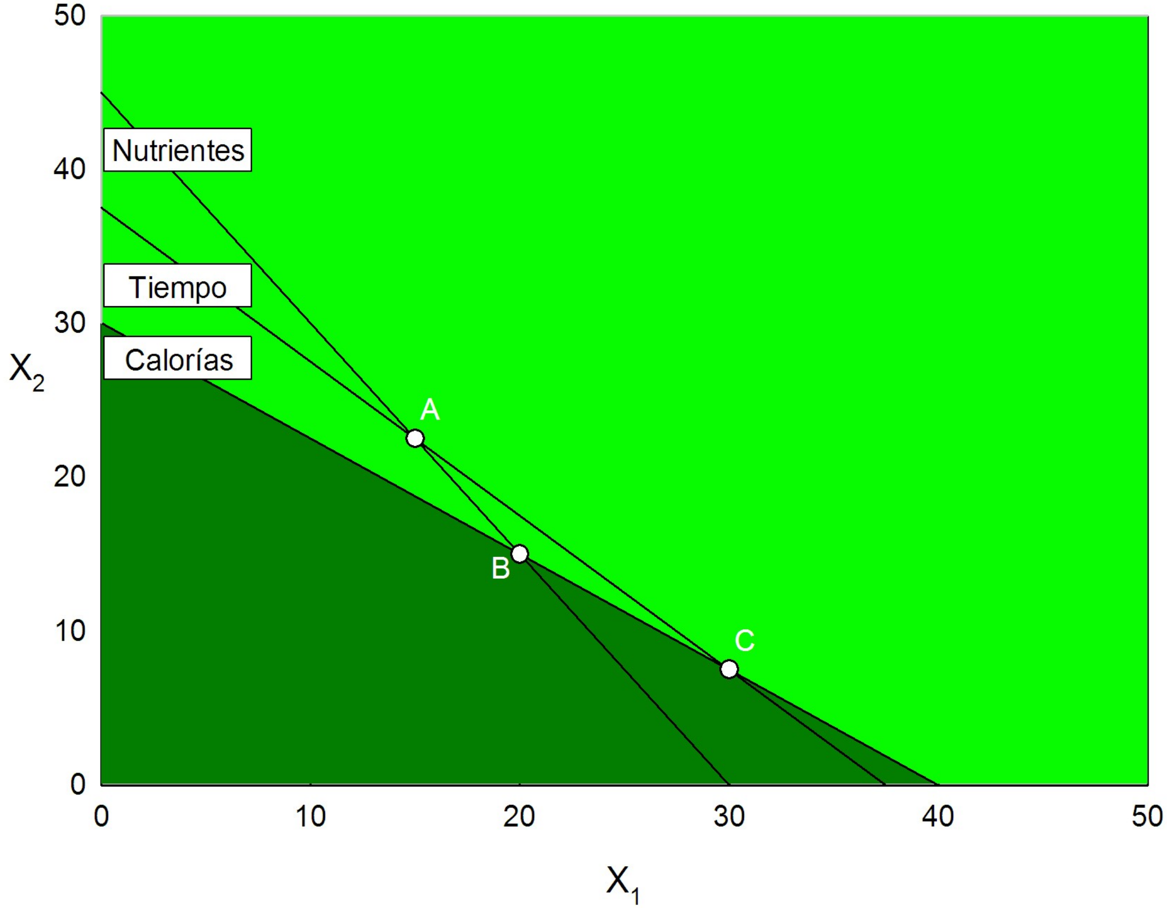
Programación por Objetivos

- Entonces, minutos y nutrientes se tratan como metas u objetivos y las calorías se tratan como un objetivo *físico*.
- El modelo matemático formulado como un problema de programación por objetivos, en este caso con metas establecidas para el tiempo y el contenido nutritivo de la dieta:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimizar} & z = d_1^+ + d_1^- + d_2^+ + d_2^- & \text{función objetivo} \\
\text{Sujeto a} & 4x_1 + 4x_2 - d_1^+ + d_1^- = 150 & \text{tiempo} \\
 & 3x_1 + 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = 90 & \text{nutrientes} \\
 & 6x_1 + 8x_2 \geqslant 240 & \text{calorías} \\
 & x_1, x_2, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geqslant 0 &
\end{array}
$$

Programación por Objetivos

- La representación geométrica del predador y su presa formulado como un problema de programación por objetivos, en este caso con metas establecidas para el tiempo y el contenido nutritivo de la dieta:



Programación por Objetivos

- Se pueden establecer metas *unilaterales*, *e.g.* si se quieren minimizar las desviaciones en un sentido pero no en el otro. La forma fácil:

Minimizar	$z = d_1^+ + d_2^-$	función objetivo
Sujeto a	$4x_1 + 4x_2 - d_1^+ + d_1^- = 150$	tiempo
	$3x_1 + 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = 90$	nutrientes
	$6x_1 + 8x_2 \geqslant 240$	calorías
	$x_1, x_2, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geqslant 0$	

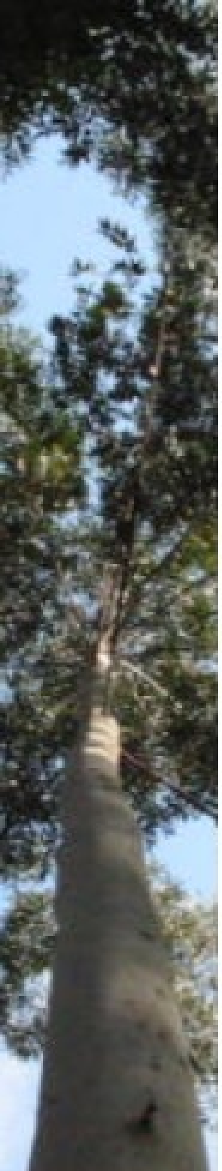
- La forma alternativa:

$$4x_1 + 4x_2 - d_1^+ = 150$$

$$4x_1 + 4x_2 - d_1^+ = 150 \Leftrightarrow 4x_1 + 4x_2 \geqslant 150$$

$$4x_1 + 4x_2 - d_1^+ \leqslant 150$$

- Ponderaciones (cardinales y ordinales)



Programación por Objetivos

- La solución del modelo con todas las combinaciones posibles para las dos metas (las unilaterales se indican como desigualdades mientras que las bilaterales se indican como igualdades):

Parámetro		Solución			Holgura/Superávit		
Tiempo	Nutrientes	x_1	x_2	Punto	Tiempo	Nutrientes	Calorías
= 150	= 90	15,0	22,5	A	0	0	30
≤ 150	= 90	20,0	15,0	B	10	0	0
		15,0	22,5	A	0	0	30
= 150	≥ 90	30,0	7,5	C	0	15	0
		15,0	22,5	A	0	0	30
≤ 150	≥ 90	20,0	15,0	B	10	0	0
		30,0	7,5	C	0	15	0
		15,0	22,5	A	0	0	30